

张善科 编著

模糊数学 在自动化技术中的应用

● 清华大学出版社

711
230

497025

模糊数学在自动化技术中的应用

张曾科 编著



清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书介绍了模糊数学在自动化中的应用技术,反映了这一领域中模糊应用技术的新进展。首先,本书阐述了模糊数学的基础知识,尔后重点介绍了自动化领域中的模糊应用技术,内容涉及模糊推理、模糊控制、模糊线性规划、模糊决策和模糊模式识别等,讲述了在这些方面模糊技术的基本理论和设计方法,并列举设计实例,便于读者学习掌握。模糊控制是本书的重点,对其工作原理、设计方法、工程实现和模糊控制方法的发展等作了较详细的介绍。

本书适合于从事自动化技术的科技工作者及工程技术人员,也可供高等院校工业自动化、自动控制、计算机应用等专业作为教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学在自动化技术中的应用/张曾科编著. —北京:清华大学出版社,1997

ISBN 7-302-02551-7

I. 模… II. 张… III. 模糊数学-应用-自动化技术 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 11705 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

印刷者:北京人民文学印刷厂

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:20 字数:469 千字

版 次:1997 年 7 月第 1 版 1997 年 7 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-02551-7/TP·1297

印 数:0001~3000

定 价:21.00 元

序 言

1965 年美国伯克利加州大学 (University of California at Berkeley) 教授扎德 (L. A. Zadeh) 发表了著名论文《Fuzzy Sets》提出了模糊性问题, 给出了其定量描述方法, 从此模糊数学诞生了。

模糊数学不是让数学变得模模糊糊, 而是让数学进入模糊现象这个客观存在的世界, 用数学的方法去描述模糊现象, 揭示模糊现象的本质和规律。模糊数学在经典数学和充满模糊性的现实世界之间架起了一座桥梁。

在短短的 30 年里模糊数学得到长足的发展, 在理论和应用中都取得了令人刮目的成果。模糊数学的应用领域涉及自动控制、图象和文字识别、人工智能、地质地震、医疗诊断、气象分析、航天航空、火车汽车驾驶、交通管理、决策评价、企业管理和社会经济等等很多方面。

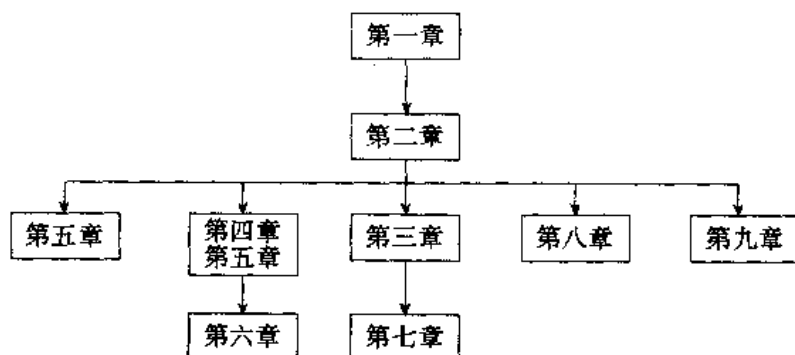
在自动化技术中的应用是模糊数学非常活跃而又硕果累累的一个领域。著名的自动控制权威 Austrom 曾经指出: 模糊逻辑控制、神经网络控制与专家控制是三种典型的智能控制方法。1974 年英国学者 E. H. Mamdani 开模糊控制之先河。1987 年日本仙台市模糊控制的地铁电力机车自动运输系统投入运行, 是模糊逻辑成功地应用于自动控制领域的一个光彩夺目的范例。90 年代初, 模糊家电风靡日本, 给日本企业带来巨大的商业效益。日本的成功带动了欧美和其它国家, 促进了模糊技术的发展。1985 年世界上第一块模糊逻辑芯片在美国贝尔实验室问世, 这是模糊技术进展的又一里程碑。日本、美国、德国等许多著名的公司都积极从事这方面的研究, 推出了许多商品化的模糊逻辑芯片。这给模糊技术的应用特别是在自动化领域中的应用注入了新的活力, 开辟了光辉诱人的前景。

我国在模糊理论方面的研究处于世界先进水平, 先后出版了几十本有关模糊理论方面的书籍, 每年发表的研究论文也非常之多, 相比之下工程技术应用则相对较弱。近年来, 计算机技术的发展给模糊技术的推广应用带来了美好前景, 模糊技术在我国逐步从理论殿堂走入工程应用, 不断深入发展。

作者曾从事模糊控制方面的科研工作, 并为清华大学自动化系的学生讲授相关课程, 在原讲义的基础上编写了本书, 部分内容反映了作者的研究成果, 但愿能为推动模糊数学在我国自动化技术中的应用出一点微薄之力。在讲述模糊数学基本理论和基础知识的基础上, 本书内容主要围绕模糊数学在自动化领域中的应用技术。全书共分九章, 第一章: 模糊集合, 第二章: 模糊关系, 第三章: 模糊数, 第四章: 模糊语言, 第五章: 模糊推理, 第六章: 模糊控制, 第七章: 模糊线性规划, 第八章: 模糊决策, 第九章: 模糊模式识别。前三章主要介绍模糊数学的基本理论以及基本概念、性质和运算法则, 是学习后续章节的数学基础。第五章较为系统地讲述了模糊推理的方法, 介绍了各种推理算法的比较研究结果, 并介绍了不精确推理的其它方法。第六章是本书的重点, 对模糊控制的工作原理、设计方法和工程实现作了详细阐述, 并介绍了模糊控制技术的最新发展, 包括各种模糊控制方法、模糊

逻辑芯片和模糊控制系统开发工具等。最后三章讲述模糊数学在线性规划、决策评价和模式识别等自动化领域中的应用技术和设计方法。

读者可以根据需要按下述图示安排阅读本书的次序。



例如,要了解有关模糊线性规划方面的内容,可以按第一章、第二章、第三章和第七章顺序阅读这四章。

由于作者水平有限,编写时间仓促,加之模糊数学和模糊技术正在发展之中,尚未十分成熟,本书错误不当之处一定不少,恳请读者斧正。

编 者

1996 年 10 月

目 录

第一章 模糊集合	1
1.1 概述	1
1.2 经典集合	2
1.3 映射	5
1.4 模糊集合	6
1.5 模糊集合的运算	8
1.6 分解定理.....	11
1.6.1 模糊集合的截集	11
1.6.2 分解定理	13
1.7 扩张原理.....	14
1.7.1 经典扩张原理	14
1.7.2 扩张原理	15
1.8 模糊集合的模运算.....	18
1.9 模糊集合的数字特征.....	23
1.9.1 模糊度	23
1.9.2 模糊集的重心	24
1.10 模糊集合的隶属函数	25
1.10.1 推理法	25
1.10.2 模糊统计方法	26
1.10.3 二元对比法	28
1.10.4 模糊分布	30
第二章 模糊关系	35
2.1 经典关系.....	35
2.2 模糊关系.....	37
2.3 模糊关系的运算.....	39
2.4 模糊等价关系.....	45
2.4.1 经典等价关系	45
2.4.2 模糊等价关系	46
第三章 模糊数	52
3.1 模糊数的概念.....	52
3.2 模糊数的运算.....	53
3.2.1 多元扩张原理	53
3.2.2 模糊数的运算	55

3.3	L-R 模糊数及其运算	60
第四章	模糊语言	66
4.1	模糊语言的概念	66
4.2	模糊语义	69
4.3	模糊语法	73
第五章	模糊推理	79
5.1	逻辑推理概述	79
5.2	二值逻辑和模糊逻辑	80
5.2.1	二值逻辑	80
5.2.2	模糊逻辑	82
5.3	模糊逻辑推理的基本形式	84
5.3.1	模糊逻辑推理及其基本形式	84
5.3.2	模糊判断句	86
5.3.3	模糊推理句	87
5.3.4	模糊推理的合成规则	88
5.3.5	模糊推理基本形式的算法	90
5.3.6	模糊推理方法的比较	98
5.4	模糊逻辑推理的扩充形式	110
5.4.1	多维模糊逻辑推理	110
5.4.2	多重模糊逻辑推理	116
5.4.3	多重多维模糊逻辑推理	118
5.5	真值限定的模糊推理方法	119
5.6	不精确推理的其它方法	122
5.6.1	主观 Bayes 方法	122
5.6.2	基于确定性理论的推理方法	126
第六章	模糊控制	130
6.1	模糊控制的工作原理	131
6.1.1	模糊控制的基本思想	131
6.1.2	模糊控制系统	132
6.1.3	模糊控制器	134
6.1.3.1	模糊化接口	134
6.1.3.2	知识库	135
6.1.3.3	推理机	136
6.1.3.4	解模糊接口	137
6.1.4	模糊控制工作原理示例	137
6.1.5	模糊控制算法的实现	141
6.1.6	模糊控制器的模型	144
6.1.6.1	模糊控制器的多值继电器模型	144

6.1.6.2	模糊控制器的代数模型	146
6.2	模糊控制器的设计	148
6.2.1	模糊控制器设计的内容	148
6.2.2	数据库的设计	148
6.2.2.1	论域的离散化	148
6.2.2.2	I/O 空间的模糊划分	149
6.2.2.3	基本模糊子集的隶属函数定义	149
6.2.3	模糊化策略	150
6.2.3.1	量程转换和量化	151
6.2.3.2	模糊化方法	151
6.2.4	规则库设计	152
6.2.4.1	模糊控制器的结构	152
6.2.4.2	建立模糊控制规则	153
6.2.4.3	模糊控制规则的完备性	154
6.2.4.4	模糊控制规则的相互作用性	155
6.2.4.5	模糊控制规则的相容性	158
6.2.5	模糊推理机制	159
6.2.5.1	Mamdani 模糊推理算法	159
6.2.5.2	Larsen 模糊推理算法	162
6.2.5.3	Tsukamoto 模糊推理算法	164
6.2.5.4	简易模糊推理算法	165
6.2.5.5	函数型模糊推理算法	166
6.2.5.6	其它模糊推理算法	166
6.2.6	解模糊策略	167
6.3	模糊控制方法的进展	169
6.3.1	Fuzzy-PID 复合控制	169
6.3.2	参数自整定模糊控制	170
6.3.3	自适应模糊控制	174
6.3.4	专家模糊控制	179
6.3.5	神经模糊控制	180
6.3.6	多变量模糊控制	187
6.4	模糊逻辑集成电路	190
6.4.1	概述	190
6.4.2	FC110	191
6.4.3	NLX230	192
6.4.4	Fuzzy-166	194
6.5	模糊控制开发工具	195
6.5.1	概述	195

6.5.2	FIDE	196
6.5.3	Fuzzy TECH	198
6.5.4	NeuFuz4 和 NeuFuz4-C	200
6.6	模糊控制系统应用实例	202
6.6.1	世界上第一例模糊控制系统——蒸汽发动机模糊控制	202
6.6.2	日本仙台市地铁机车模糊控制	206
6.6.3	全自动洗衣机模糊控制	210
6.6.4	聚合反应釜生产过程模糊控制	213
第七章	模糊线性规划	220
7.1	模糊判决	220
7.2	模糊极值	223
7.2.1	有界函数的模糊极值	223
7.2.2	模糊约束下有界函数的模糊极值	224
7.2.3	模糊约束下多目标函数的模糊极值	226
7.3	模糊线性规划	229
7.3.1	约束条件有伸缩性的 FLP	230
7.3.2	多目标 FLP	235
7.3.2.1	经典多目标 LP 的模糊最优解	235
7.3.2.2	约束条件有伸缩性的多目标 FLP	240
7.3.3	有模糊系数的 FLP	244
7.3.3.1	约束条件系数为 L-R 模糊数的 FLP	244
7.3.3.2	目标函数系数为 L-R 模糊数的 FLP	246
7.3.3.3	用线性区间法解 FLP	249
7.4	模糊线性规则的图解法	251
第八章	模糊决策	257
8.1	模糊概率	257
8.2	经典统计决策	260
8.3	有模糊信息源的统计决策	263
8.4	模糊统计决策	266
8.5	二元对比排序	276
8.6	意见集中	279
8.7	模糊综合评判	280
8.7.1	模糊综合评判的数学模型	281
8.7.2	模糊综合评判模型的改进	283
8.7.2.1	多级综合评判模型	283
8.7.2.2	广义合成运算的综合评判模型	284
8.7.3	模糊综合评判的逆问题	288
第九章	模糊模式识别	290

9.1 模糊模式识别的直接方法	290
9.2 模糊距离与贴近度	292
9.2.1 模糊距离	292
9.2.2 模糊集合的内积与外积	293
9.2.3 贴近度	296
9.3 模糊模式识别的间接方法	300
参考文献	305

第一章 模糊集合

1.1 概 述

世界上许多事物都具有模糊的、非定量的特点。可以说,模糊性是客观世界的普遍现象,而不是例外。

有的概念是明确的,但也有的概念是模糊的。例如,我们日常生活中常常使用的一些概念:年青人、老人、胖子、瘦子、大高个儿、矮个儿、生西瓜、熟西瓜、成绩优秀、学习不好、成绩过得去、贫困、发达、健壮、美丽等等就具有模糊性,很难用绝对的属于或不属于来描述它们。我们很难说 35 岁的人是不是属于年青人? 55 岁的人是不是属于老年人? 身高多少算大高个儿? 身高多少算矮个儿? 在自然科学领域中模糊性也是到处存在。自动控制中也常说:误差较大、超调太大、稳定性不好、扰动较小等等。究竟误差多大属于误差较大? 超调多少属于超调太大? 这里也是不明确的,具有模糊性。

事物之间的关系有的是明确的,但也有的是模糊的。例如两个人长得像、高矮差不多、甲比乙岁数大点等等这些关系都具有模糊性。

模糊性是客观事物的差异在中介过渡时所呈现的亦此亦彼性。人们都会同意 25 岁的人应属于年青人,45 岁的人属于中年人。那么从 25 岁到 45 岁这一过渡当中,比如 35 岁,应该属于青年人还是中年人? 这个问题就很难十分明确地回答,35 岁的人有点像年青人也有点像中年人,这种亦此亦彼的现象即模糊性。

控制论的创始人维纳在谈到人胜过最完善的机器时说过:“人具有运用模糊概念的能力”。人的思维和控制作用具有模糊性,能够运用模糊概念。人在感知、知识、推理、决策的过程中往往运用和处理模糊概念。当我们判断走过来的人是谁时,只要把来人的高矮、胖瘦、模样、走路姿势等等与存储在大脑中的样本进行比较,就不难得出正确结论。而不必去精确地知道来人的身高、体重、是否双眼皮、手臂摆动角度和频率等一大批数据。当我们去拿一个玻璃杯子时,究竟用多大力气,也从来不去精确计算,但是我们也并没有因此因用力过猛捏碎杯子,也没有因用力太小拿不起杯子。当一个汽车司机把汽车停到已经停放了不少汽车的停车场上时,他只要根据观察到的周围已停汽车的位置情况,就能把自己的汽车停到空档中去。如果用一台数字计算机来解这个问题,那就要精确地测量出周围汽车和空位置的距离等数据,用自己汽车的位置、速度、角度等作状态变量列写出方程,解出汽车的停车轨迹。人脑有存储、处理模糊信息、模糊知识的能力,这正是无与伦比的一种优越性。模糊数学的创始人美国加利福尼亚大学教授扎德(L·A·Zadeh)曾说过:“当系统的复杂性增长时,我们对系统作出精确而有意义的描述的能力将相应降低,直到达到这样一个阈值,一旦超过它,精确性和有意义性将变成两个互相排斥的特性。”这种精确性和有意义性的互克性使得很多问题无法用精确的方法去描述和解决,而模糊的处理方法却有了用武之地。

为了寻找一种处理模糊信息的工具,一种描述和加工模糊信息的数学方法——模糊数学应运而生。模糊数学不是让数学变成模模糊糊的东西,而是让数学进入模糊现象这个客观存在的世界。它在传统的经典数学与充满模糊性的现实世界之间架起了一座桥梁,用数学的科学方法抽象描述了模糊现象,揭示了模糊现象的本质和规律。

1965年扎德教授发表了著名论文 Fuzzy Sets,提出了模糊性问题,给出了其定量表示法,模糊数学从此诞生了。以后,各国学者继续在这个领域进行研究,模糊数学从理论上逐步完善,应用日益广泛,涉及聚类分析、图象识别、自动控制、人工智能、地质地震、医学、航天航空、气象、企业管理和社会经济等等很多领域,取得不少成果。1978年,国际性期刊 Fuzzy Sets and Systems 诞生,1984年,国际模糊系统协会(IFSA)成立。1989年,日本30家大公司集资30亿日元成立了国际模糊工程研究所,制定了模糊数学和模糊技术研究开发的长远规划,以保持日本在这个领域的竞争能力。我国从70年代初起也开始了模糊数学理论与应用方面的研究,并取得了很多成果。

概率论的产生把数学的应用范围从必然现象扩大到偶然现象的领域。模糊数学则把数学的应用范围从精确现象扩大到模糊现象的领域。概率论研究随机性,模糊数学研究模糊性。随机性和模糊性均属于不确定性,但两者又有本质的不同。

1.2 经典集合

集合是数学的一个基本概念,是现代数学中最重要的工具之一。

任何一个概念总有它的内涵与外沿,概念的内涵是指这一概念的本质属性,概念的外沿则是指符合这一概念的全体对象。所有的人都成了“人”这一概念的外沿,凡人所共有而非人便不具备的特性则是“人”这一概念的内涵。外沿实际上就是一个集合。

当我们谈论某一个概念的外沿时,总离不开一定的讨论范围。例如,我们讨论“工业控制计算机”这一概念时,自然不必去考虑那些风马牛不相及的事物,例如我们不必去考虑汽车、机床或大象、老鼠等等,我们往往是把议题限制在某个相关的范围之内,例如“计算机”或“控制装置”等。这个讨论的范围称为“论域”,论域中的每个对象称为“元素”。

至此,我们可以给集合下一个定义:

定义 1.1 给定论域 U , U 中具有某些特定属性的元素的全体称为 U 上的一个集合。

集合常以大写字母 A, B, \dots 等表示,论域常以大写字母 U, V, X, Y 等表示,元素一般用小写字母 u, v, x, y 等表示。

集合通常有以下几种表示法。

1. 列举法(枚举法)

——列出集合的全体元素即所谓列举法。

例如,正实数论域 $U = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ 上小于 10 的奇数集合 A 可表示为:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

元素列写于大括号中。一般地有:

$$A = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$$

其中 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ 是论域 U 中属于集合 A 的元素的全体。

2. 定义法

定义法给出集合中元素的特征。上例可表示为:

$$A = \{u | u \in U, u \text{ 是奇数}, u < 10\}$$

符号 \in 表示:属于;与之相反, $\bar{\in}$ 表示:不属于。

3. 特征函数法

定义 1.2 设 A 是论域 X 上的一个集合,定义 X 上的函数:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \bar{\in} A \end{cases} \quad (1.1)$$

称 $\mu_A(x)$ 为集合 A 的**特征函数**,可简记为 $A(x)$ 。

用特征函数可以表示一个集合。例如,一个学习小组共有 6 人,在这一论域中男生和女生的集合可表示为:

$$\text{男生} = 0/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5 + 1/x_6$$

$$\text{女生} = 1/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 0/x_5 + 0/x_6$$

式中加号不表示相加,仅用来表示列举。每项分式也不表示相除,分母表示元素名称,分子表示该元素对应的特征函数值。

下面我们给出集合的一些有关概念和运算。

定义 1.3 A 和 B 是同一论域上的两个集合,若 A 中的元素全都是 B 的元素,那么称 A 是 B 的**子集**,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作 A 包含于 B ,或 B 包含 A 。若 $A \subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A ,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A \subset B$ 。若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 则称 A 等于 B ,或 B 等于 A ,记作 $A = B$ 或 $B = A$ 。

我们引入下面两个符号:符号 \forall 表示:所有的,符号 \exists 表示:至少有一个。那么定义 1.3 可表示为:若 $\forall a \in B$,则 A 为 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 。若 $A \subseteq B$,且 $\exists b \bar{\in} A$,则 A 为 B 的真子集,记为 $A \subset B$ 。式中 $a \in A, b \in B$,表示属于 A, B 的元素。

定义 1.4 设 A, B 是论域 U 上的两个集合,由集合 A 和集合 B 的所有元素所组成的集合称为 A 和 B 的**并集**,记作 $A \cup B$;由所有既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合称为 A 和 B 的**交集**,记作 $A \cap B$;由 U 中所有不属于 A 的元素所成的集合称为 A 的**补集**,记为 \bar{A} 。

上述定义也可表示为:

$$\text{并集 } A \cup B = \{u \in U | u \in A \text{ 或 } u \in B\}$$

$$\text{交集 } A \cap B = \{u \in U | u \in A \text{ 且 } u \in B\}$$

$$\text{补集 } \bar{A} = \{u \in U | u \bar{\in} A\}$$

还可以定义 A 减 B 的差集:

$$\text{差集 } A - B = \{u \in U | u \in A \text{ 且 } u \bar{\in} B\}$$

集合的并、交、补、差运算可以用文式图形象直观地表示。

当一个集合不包含任何元素时,称为**空集**,空集一般记为 \emptyset 。

不难证明集合的并、交、补运算有下面的一些性质:

性质 1.1

(1) 幂等律

$$A \cup A = A, A \cap A = A$$

(2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

(3) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(4) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(5) 吸收律

$$(A \cap B) \cup A = A$$

$$(A \cup B) \cap A = A$$

(6) 两极律

$$A \cup U = U, A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$

(7) 复原律

$$A = A$$

(8) 摩根律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(9) 排中律

$$A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \emptyset$$

含有有限个元素的集合称为有限集;相反,含有无限个元素的集合称为无限集。含有 n 个元素的有限集 A 可记为:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

上式中的元素的下标也可构成一个集合:

$$T = \{1, 2, \dots, n\}$$

称为**指标集**。于是 A 可表示为:

$$A = \{a_t | t \in T\}$$

有限集的指标集是有限集,无限集的指标集是无限集。

集合的并、交运算可以推广到任意多个集合上去。设 T 是任一指标集(有限集或无限集),多个集合的并、交运算可以表示为:

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup \{A_t | t \in T\} = \{u \in U | \exists t \in T \text{ 使 } u \in A_t\}$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap \{A_t | t \in T\} = \{u \in U | \forall t \in T, u \in A_t\}$$

分别称为**集合族** $\{A_t | t \in T\}$ 的并集与交集。

4
1
103
美

1.3 映 射

定义 1.5 设 A, B 是两个集合, 若有一个规则 f , 根据 f , 对每一个 $x \in A$ 唯一确定一个 $y \in B$ 与 x 对应, 则称 f 是 A 到 B 的一个映射, 记为

$$f: A \rightarrow B$$

A 称为映射 f 的定义域, B 称为 f 的值域; y 称为 x 在 f 下的象, 记作 $y = f(x)$, 并用符号

$$f: x \mapsto y$$

表示, x 称为 y 的一个原象。

一个映射应当联系着两个集合和一个对应规则, 两个集合未必是同一论域上的集合。

例 1.1 令 $A = [0, 2\pi], B = [-1, 1]$, 可知从 A 到 B 的映射:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x) = \sin x$$

即是正弦函数(只取一个周期定义域)。

根据映射的定义, 集合的特征函数也可以用映射来表示。设 A 是论域 U 上的集合, 由 A 可确定一个由 U 到 $\{0, 1\}$ 的映射 μ_A :

$$\mu_A: U \rightarrow \{0, 1\}$$

$$u \mapsto \mu_A(u)$$

这里 $u \in U$, U 为映射 μ_A 的定义域, $\{0, 1\}$ 为值域, 特征函数 $\mu_A(u)$ 为 u 在映射 μ_A 下的象, u 为原象。值域 $\{0, 1\}$ 只包含 0 和 1 两个值。

定义 1.6 如果:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ 有 } x_1 \neq x_2 \mapsto f(x_1) \neq f(x_2)$$

称映射 $f: A \rightarrow B$ 为单射, 即不同的原象不会有同一个象。如果:

$$\forall y \in B \text{ 有 } \exists x \in A \text{ 使 } y = f(x)$$

称映射 f 为满射, 即 B 中所有元素都至少有一个原象。

如果 f 即是单射又是满射, f 称双射, 双射也称一一对应。

由定义 1.6, 单射情况下, 一个象只有一个原象。满射情况下, 所有的象都至少有一个原象。而双射, 定义域和值域内的所有元素都是一一对应的。

例 1.1 中的映射是满射而不是单射。若把例 1.1 的 A 取为 $[0, \pi/2]$, B 取为 $[0, 1]$, 则映射 $f: x \mapsto f(x) = \sin x$ 是 A 到 B 的双射。

注意在映射的定义中, 定义域中每个元素只能唯一地确定一个象。反过来, 值域中的每个象却可以有多个原象。

定义 1.7 设映射 $f: A \rightarrow B$ 是一一对应的, 称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 为 f 的逆映射, 其中 $f^{-1}(y) = x$ 当且仅当 $f(x) = y$ 。

定义 1.8 设 A, B, C 是三个集合, 已知两个映射 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$, 则可由 f, g 确定 A 到 C 的映射:

$$h: A \rightarrow C$$

$$a \mapsto h(a) = g(f(a))$$

称映射 h 为 f 与 g 的合成映射, 记为

$$h = g \circ f$$

性质 1.2 合成映射具有下述性质:

- (1) 满足结合律, 若 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$, 则 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- (2) 若 f, g 都是满射, 则 $g \circ f$ 也是满射;
- (3) 若 f, g 都是双射, 则 $g \circ f$ 也是双射;
- (4) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 也是满射。

1.4 模糊集合

经典集合所描述的是确切概念, 论域中的元素要么属于它要么不属于它, 非此即彼, 经纬分明, 对应的特征函数要么为 1 要么为 0, 二者必居其一。而对于模糊概念, 例如我们在 1.1 节的概述中所例举的, 55 岁的人是否属于老年人? 用绝对的属于或不属于去描述就欠合理了。扎德教授拓广了集合论, 打破了绝对的隶属关系, 于 1965 年提出了新的概念——模糊集合。

定义 1.9 所谓给定论域 X 上的一个模糊集合 \underline{A} , 是指对于任意的 $x \in X$, 都确定了一个数 $\mu_{\underline{A}}(x)$, $0 \leq \mu_{\underline{A}}(x) \leq 1$, 它表示 x 对 \underline{A} 的隶属程度。映射:

$$\mu_{\underline{A}}: X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mu_{\underline{A}}(x)$$

叫做 \underline{A} 的隶属函数。

一般在字母下加波浪线 \sim 表示模糊集合, 以区别于经典集合。隶属函数 $\mu_{\underline{A}}(x)$ 可简记为 $\underline{A}(x)$ 。

由定义可见, 模糊集合完全由其隶属函数 $\mu_{\underline{A}}$ 来描述, 可以说 \underline{A} 与 $\mu_{\underline{A}}$ 等价。 $\mu_{\underline{A}}(x)$ 表示 x 对 \underline{A} 隶属程度的大小, 它在值域 $[0, 1]$ 区间上连续取值, 所以很适合表示元素属于某一模糊集合的种种模棱两可的暧昧状态。

当 $\mu_{\underline{A}}(x)$ 的值域由 $[0, 1]$ 这个连续的闭区间退化为 $\{0, 1\}$ 即只含其两个端点的极端情况时, \underline{A} 便退化为经典集合 A 。可见, 经典集合仅是模糊集合的特殊情形, 模糊集合则是经典集合的推广。

例 1.2 用 \underline{A} 表示模糊集合“老年人”, 其隶属函数可由下式计算:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 50 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{x-50}\right)^2}, & 50 < x \leq 200 \end{cases}$$

可以求得:

$$\mu_{\tilde{A}}(55)=0.5$$

$$\mu_{\tilde{A}}(60)=0.8$$

$$\mu_{\tilde{A}}(70)=0.94$$

⋮

55岁的人属于老年人的隶属度为0.5,他只能算是半老。

对于论域 X 上的所有模糊集记为 $F(X)$ 。

若 \tilde{A} 为 X 上的模糊集合,即 $\tilde{A} \in F(X)$,如果对 $\forall x \in X$,均有 $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$,则称 \tilde{A} 为**空集**,记为 \emptyset 。

若 $\tilde{A} \in F(X)$,如果对 $\forall x \in X$,均有 $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$,则称 \tilde{A} 为**全集**。

全集实际上已退化为经典集合,论域实际上就是全集。

模糊集合的表示方法,分有限论域和无限论两种情况讨论。所谓有限论域即论域中元素个数有限,无限论域自然就是论域中元素个数无限。

在有限论域情况下,模糊集合的表示法和普通集合的特征函数法相同。论域 $X=\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 上的模糊集合 \tilde{A} 可以表示为:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \\ &= \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \dots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n\end{aligned}$$

当 X 中的某些元素对 \tilde{A} 的隶属度为0时,上述表示法中可略去不写,这样可使表达式更简洁。

有限论域上的模糊集合还可以用向量的形式来表示:

$$\tilde{A} = (\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}}(x_n))$$

这种表示形式中,隶属度为0的项也必须写上,而且不能随意颠倒顺序。

这种表示模糊集合的向量形式,属于模糊向量,模糊向量定义如下:

定义 1.10 若向量 (a_1, a_2, \dots, a_n) 的分量满足条件 $0 \leq a_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n$,则称其为一个 **n 维模糊向量**。

模糊向量在模糊数学中可以解释为某个有限论域上的模糊集合。

例 1.3 给定论域 $N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,模糊集合 \tilde{A} 表示“几个”这一模糊概念。根据经验可以给出隶属函数的值,那么 \tilde{A} 可以表示为:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= 0/1 + 0/2 + 0.3/3 + 0.7/4 + 1/5 + 1/6 + 0.7/7 \\ &\quad + 0.3/8 + 0/9 + 0/10\end{aligned}$$

$$\text{或: } \tilde{A} = 0.3/3 + 0.7/4 + 1/5 + 1/6 + 0.7/7 + 0.3/8$$

$$\text{或: } \tilde{A} = (0, 0, 0.3, 0.7, 1, 1, 0.7, 0.3, 0, 0)$$

无限论域的情况下,扎德给出了如下表示方法:

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

这里 \int 不表示积分,而是表示各个元素与其隶属度对应关系的一个总括。

例 1.4 例 1.2 中我们曾举出过的“老年人”这个模糊集合可以表示为:

$$\text{老年人} = \int_{50}^{200} \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{x-50} \right)^2} / x$$

1.5 模糊集合的运算

经典集合有交、并、补等运算,这些运算如何推广到模糊集合上来呢?如何扩充才更符合实际?这是一个很深刻的问题,扩充的方法也并非唯一,目前使用较多的仍是扎德给出的定义。

定义 1.11 设 \tilde{A}, \tilde{B} 均是 X 上的模糊集,定义 $\tilde{A} \cup \tilde{B}, \tilde{A} \cap \tilde{B}, \bar{\tilde{A}}$, 它们分别具有隶属函数:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) &= \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \\ \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) &= \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \\ \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) &= 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\end{aligned}\tag{1.2}$$

分别称为模糊集合 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的并集、交集和补集。

取大、取小运算 \max 和 \min 分别可以用 \vee, \wedge 符号来表示:

$$\begin{aligned}\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) &= \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) &= \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)\end{aligned}$$

按扎德的表示法有:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \tilde{B} &= \int_X \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) / x \\ &= \int_X (\mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)) / x \\ \tilde{A} \cap \tilde{B} &= \int_X \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) / x \\ &= \int_X (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)) / x \\ \bar{\tilde{A}} &= \int_X (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) / x\end{aligned}$$

例 1.5 设 \tilde{A}, \tilde{B} 为同一论域上的两个模糊集合, $\tilde{A} = (1, 0.9, 0.4, 0.2, 0)$, $\tilde{B} = (0.2, 0.3, 0.6, 0.1, 0)$, 则:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \tilde{B} &= (1, 0.9, 0.6, 0.2, 0) \\ \tilde{A} \cap \tilde{B} &= (0.2, 0.3, 0.4, 0.1, 0) \\ \bar{\tilde{A}} &= (0, 0.1, 0.6, 0.8, 1)\end{aligned}$$

模糊集合的并、交、补运算可以由图 1.1 的图形来表示,称扩展文氏图。

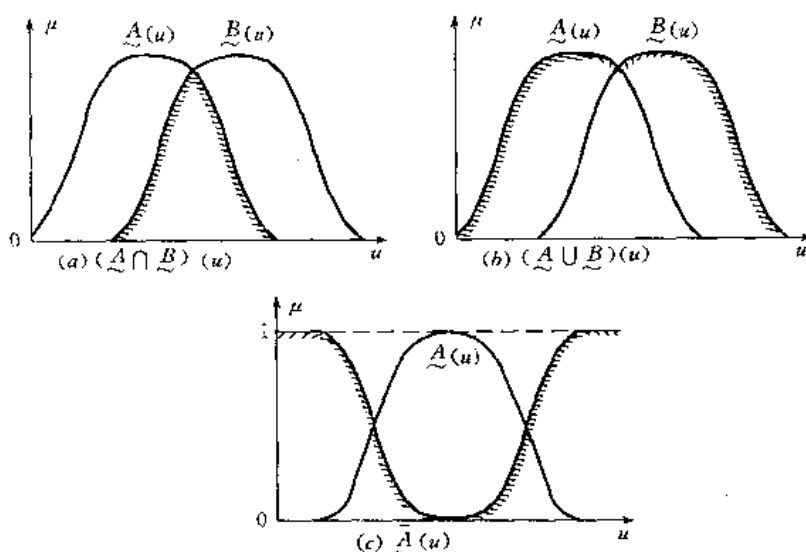


图 1.1 模糊集合运算图示

模糊集合的并、交运算可以推广到多个模糊集的情形。具有指标集 T 的模糊集合族 $\{A_i | i \in T\}$ 的并集与交集分别记为 $\bigcup_{i \in T} A_i$ 和 $\bigcap_{i \in T} A_i$ ，它们的隶属函数分别为：

$$\bigcup_{i \in T} A_i \Leftrightarrow \bigvee_{i \in T} \mu_{A_i}(x)$$

$$\bigcap_{i \in T} A_i \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in T} \mu_{A_i}(x)$$

性质 1.3 模糊集合运算有以下性质：

(1) 幂等律

$$A \cup A = A, A \cap A = A$$

(2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

(3) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(4) 分配率

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(5) 吸收率

$$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$$

(6) 两极律

$$A \cap X = A, A \cup X = X$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$$

(7) 复原律

$$\overline{\overline{A}} = A$$

(8) 摩根律

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}$$

分配律和摩根律有更一般化的形式。设 $\{A_t | t \in T\} \in F(X)$, 有分配律

$$\overline{A \cap (\bigcup_{t \in T} A_t)} = \bigcup_{t \in T} (\overline{A \cap A_t})$$

$$\overline{A \cup (\bigcap_{t \in T} A_t)} = \bigcap_{t \in T} (\overline{A \cup A_t})$$

摩根律

$$\overline{(\bigcup_{t \in T} A_t)} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}$$

$$\overline{(\bigcap_{t \in T} A_t)} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}$$

以上运算性质的证明, 只需验证对 $\forall x \in X$, 以上等式两边的隶属度相等即可。现以摩根律为例证明如下:

$\forall x \in X$, 有:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}(x) &= 1 - (\overline{A \cup B})(x) \\ &= 1 - [A(x) \vee B(x)] \\ &= [1 - A(x)] \wedge [1 - B(x)] \\ &= \overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B})(x) \end{aligned}$$

故有:

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$

同理可证:

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

在以上证明中, 模糊集合的隶属函数采用了简化的形式, 如 $\mu_A(x)$ 记为 $A(x)$ 等等。

以上八条运算规律对应了 1.2 节中经典集合的前八条运算规律, 而经典集合的排中律在模糊集合则不成立, 因为模糊集合本身就是对经典集合非此即彼的排中律的一种突破。

与经典集合对应, 模糊集合也有包含、相等的概念。

定义 1.12 $A, B \in F(X)$, 若对于 $\forall x \in X$, 均有 $A(x) = B(x)$, 则称 A 和 B 相等, 记作 $A = B$; 若对于 $\forall x \in X$, 均有 $A(x) \leq B(x)$ 则称 A 包含于 B , 或 B 包含 A , 或 A 为 B 的子集, 记为: $A \subseteq B$, 或 $B \supseteq A$ 。

显然有:

$$\begin{aligned} A &\subseteq (A \cup B) \\ B &\subseteq (A \cup B) \end{aligned}$$

$$(A \cap B) \subseteq A$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \subseteq \tilde{A}$$

根据包含的定义,我们可以说熟透的苹果 \subseteq 熟苹果,出类拔萃的学生 \subseteq 优秀学生。

1.6 分解定理

1.6.1 模糊集合的截集

我们可以用扩展文氏图画出一个模糊集的隶属函数曲线,但我们不能用文氏图画出一个模糊集的范围。在实际应用中有时却需要对模糊现象作出明确的判断。例如,上级决定把较长时间未提过薪的工作人员上调一级工资,那么职能部门总要定出一个明确的界限来划定上调工资的范围,否则将无法操作执行。因此需有一种方法把模糊集合与经典集合沟通起来。为此,给定一个数 $\lambda \in [0, 1]$, λ 作为一门限,当 $A(x) \geq \lambda$ 时,就认为 x 是 A 中的元素。这样于每一个 $\lambda \in [0, 1]$,都能从 X 论域中确定一个经典集合,它是 A 在 λ 这一门限下的显像。

定义 1.13 设 $A \in F(X), \forall \lambda \in [0, 1]$,记:

$$A_\lambda = (A)_\lambda = \{x \in X | A(x) \geq \lambda\}$$

称为 A 的 λ 截集,亦称 λ 水平截集, λ 叫置信水平。又记

$$A_{\lambda+} = (A)_{\lambda+} = \{x \in X | A(x) > \lambda\}$$

称为 A 的 λ 强截集,亦称开截集。

显然 A_λ 和 $A_{\lambda+}$ 都是 X 上的经典集。

性质 1.4 截集有下列性质:

$$(1) (\tilde{A} \cup \tilde{B})_\lambda = \tilde{A}_\lambda \cup \tilde{B}_\lambda$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\lambda = \tilde{A}_\lambda \cap \tilde{B}_\lambda$$

$$(2) (\tilde{A} \cup \tilde{B})_{\lambda+} = \tilde{A}_{\lambda+} \cup \tilde{B}_{\lambda+}$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_{\lambda+} = \tilde{A}_{\lambda+} \cap \tilde{B}_{\lambda+}$$

$$(3) A_\lambda \subseteq A_{\lambda+}$$

$$(4) \text{若 } \tilde{A} \subseteq \tilde{B}, \text{ 则 } A_\lambda \subseteq B_\lambda, A_{\lambda+} \subseteq B_{\lambda+}$$

$$(5) \text{若 } \lambda_1 > \lambda_2, \text{ 则 } A_{\lambda_1} \subseteq A_{\lambda_2}, A_{\lambda_1+} \subseteq A_{\lambda_2+}$$

$$(6) (\tilde{A})_\lambda = \overline{A_{(1-\lambda)+}}$$

$$(7) (\tilde{A})_{\lambda+} = \overline{A_{1-\lambda}}$$

$$(8) A_0 = X, A_1 = \emptyset$$

证明: (1)对于任一 $x \in X$,有:

$$\begin{aligned} x \in (\tilde{A} \cup \tilde{B})_\lambda &\Leftrightarrow (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \geq \lambda \\ &\Leftrightarrow (\tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)) \geq \lambda \\ &\Leftrightarrow \tilde{A}(x) \geq \lambda \text{ 或 } \tilde{B}(x) \geq \lambda \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in A_\lambda \text{ 或 } x \in B_\lambda$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)_\lambda$$

这就意味着

$$(\widetilde{A \cup B})_\lambda = \widetilde{A}_\lambda \cup \widetilde{B}_\lambda$$

同理有

$$(\widetilde{A \cap B})_\lambda = \widetilde{A}_\lambda \cap \widetilde{B}_\lambda$$

(6) 对任一 $x \in X$, 有:

$$x \in (\widetilde{A})_\lambda \Leftrightarrow \widetilde{A}(x) \geq \lambda$$

$$\Leftrightarrow 1 - \widetilde{A}(x) \geq \lambda$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{A}(x) \leq 1 - \lambda$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{A}(x) \leq 1 - \lambda$$

$$\Leftrightarrow x \in \widetilde{A}_{(1-\lambda)}$$

$$\Leftrightarrow x \in \widetilde{A}_{(1-\lambda)}$$

其它性质读者可自行证明。

例 1.6 对于例 1.2 所给出的“老年人”模糊集的情况, 若我们取 $\lambda=0.8$, 则 $A_{0.8} = [60, 200]$, 也就是说在 0.8 这一置信水平上, 60 岁以上的人属老年人。

定义 1.14 设 $\widetilde{A} \in F(X)$, 称 A_1 为 \widetilde{A} 的核, 记为 $\ker \widetilde{A}$; 称 A_0 为 \widetilde{A} 的支集, 记作 $\text{supp } \widetilde{A}$; 称 $A_0 - A_1$ 为 \widetilde{A} 的边界。

\widetilde{A} 的核、支集、截集见图 1.2。

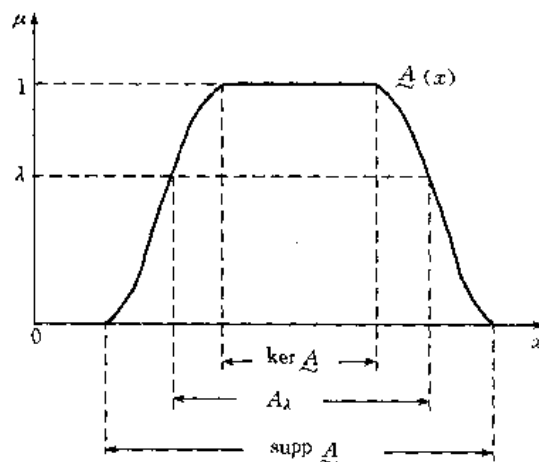


图 1.2 模糊集的截集、支集和核

定义 1.15 设 $\widetilde{A} \in F(X)$, 若 $\ker \widetilde{A} \neq \emptyset$, 则称 \widetilde{A} 为正规模糊集, 否则 \widetilde{A} 称为非正规模糊集。

\widetilde{A} 的截集、支集、核均为经典集合, 一般有:

$$\ker A \subseteq A_1 \subseteq \text{supp } A \subseteq X$$

即:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq A_4$$

其中 $\lambda \in (0, 1)$ 。

例 1.7 论域 $U = \{a, b, c, d, e\}$, 模糊集 $A = 1/a + 0.8/b + 0.5/c + 0.2/d + 0/e$, 则:

$$\ker A = A_1 = \{a\}$$

$$A_{0.7} = \{a, b\}$$

$$A_{0.2} = \{a, b, c, d\}$$

$$\text{supp } A = A_0 = \{a, b, c, d\}$$

有了截集的概念, 我们就可以给出模糊集合的分解定理。

1.6.2 分解定理

定义 1.16 设 $\lambda \in [0, 1]$, $A \in F(X)$, 由 λ, A 构造一个新的模糊集, 记为 λA , 称为 λ 与 A 的数乘, 其隶属函数为:

$$\lambda A(x) = \lambda \wedge A(x), \quad \forall x \in X \quad (1.3)$$

数乘有以下性质:

(1) 若 $\lambda_1 \leq \lambda_2$, 则 $\lambda_1 A \subseteq \lambda_2 A$

(2) 若 $A \subseteq B$, 则 $\lambda A \subseteq \lambda B$

对于模糊集的数乘 λA , 当模糊集退化为其特例经典集时, 式(1.3)中的隶属函数 $A(x)$ 由特征函数 $\mu_A(x)$ 来代替。

定理 1.1 (分解定理) 设 $A \in F(X)$, 则

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda A \quad (1.4)$$

证明: 只需证明: $\forall x \in X$ 有 $A(x) = \bigvee_{\lambda \in [0, 1]} (\lambda \wedge \mu_{A_\lambda}(x))$ 成立。

$$\bigvee_{\lambda \in [0, 1]} (\lambda \wedge \mu_{A_\lambda}(x)) = \left(\bigvee_{0 \leq \lambda \leq A(x)} (\lambda \wedge \mu_{A_\lambda}(x)) \right) \vee \left(\bigvee_{A(x) < \lambda \leq 1} (\lambda \wedge \mu_{A_\lambda}(x)) \right)$$

注意到:

$$\begin{aligned} \mu_{A_\lambda}(x) &= \begin{cases} 1, & x \in A_\lambda \\ 0, & x \notin A_\lambda \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & A(x) \geq \lambda \\ 0, & A(x) < \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

所以: $\bigvee_{\lambda \in [0, 1]} (\lambda \wedge \mu_{A_\lambda}(x))$

$$= \left(\bigvee_{0 \leq \lambda \leq A(x)} (\lambda \wedge 1) \right) \vee \left(\bigvee_{A(x) < \lambda \leq 1} (\lambda \wedge 0) \right)$$

$$= \bigvee_{0 \leq \lambda \leq A(x)} \lambda = A(x)$$

证毕。

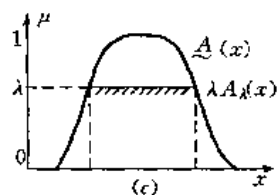
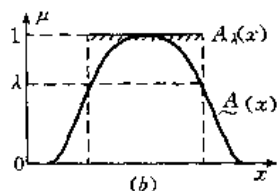
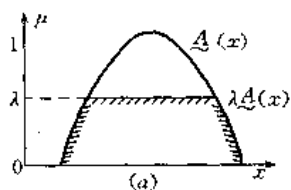


图 1.3 λA , A_λ 和 λA_λ

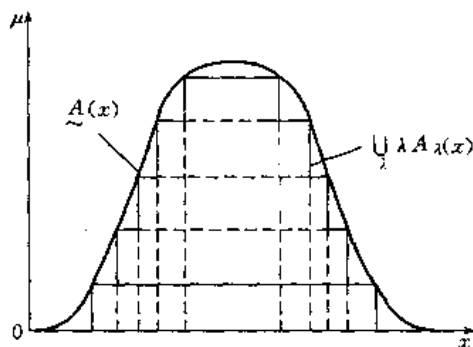


图 1.4 分解定理

由分解定理的式(1.4)不难看出,任何一个模糊集合 \tilde{A} 都可以分解为 $\lambda A_\lambda (\lambda \in [0,1])$ 之并。其中 λA_λ 是其隶属函数仅取 0 和 λ 两个值的特殊模糊集,它由数 λ 和 \tilde{A} 的截集 A_λ 的数乘而得。

图 1.3 给出了 $\lambda \tilde{A}$, A_λ , λA_λ 的直观表示。

图 1.4 给出了分解定理的直观表示。图中只画出了有限几个 λA_λ 的并。可以想象,当 λ 取遍 $[0,1]$ 上所有的值时,并集 $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda$ 的隶属函数曲线将最终与 $\tilde{A}(x)$ 重合。

1.7 扩张原理

1.7.1 经典扩张原理

为了便于表达,我们先引入一个符号,给定论域 X ,我们用 $S(X)$ 表示 X 上的所有经典集合,正如 $F(X)$ 表示 X 上的所有模糊集合。

设 X, Y 是经典集合,给定 X 到 Y 的映射

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

那么 f 可以诱导出两个映射:一个是 $S(X)$ 到 $S(Y)$ 的映射,一个是 $S(Y)$ 到 $S(X)$ 的映射,前者记为 f ,后者记为 f^{-1} ,它们的定义如下:

$$\begin{aligned} f: S(X) &\rightarrow S(Y) \\ A &\mapsto f(A) = \{y \mid \exists x \in A, y = f(x)\} \\ f^{-1}: S(Y) &\rightarrow S(X) \\ B &\mapsto f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \end{aligned}$$

以上就是经典扩张原理。

经典扩张原理把两个论域中元素间的对应关系扩张到经典集合之间的对应关系。 $f(A)$ 实际上就是 $\forall x \in A$ 在映射 $x \mapsto f(x)$ 下的象的集合, 而 $f^{-1}(B)$ 则是映射 $x \mapsto f(x)$ 下所有属于 B 的象 $\forall f(x) \in B$ 的原象的集合。

性质 1.5 由经典扩张原理定义的映射 f 和 f^{-1} 有下述性质:

$$(1) f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$(2) f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

$$(3) f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

$$(4) f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

(5) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$, f 为单射时等号成立

(6) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, f 为满射时等号成立

$$(7) f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$$

注意性质(2), (5), (6)均不为等号, 我们用图 1.5 的(a), (b), (c)表示它们。

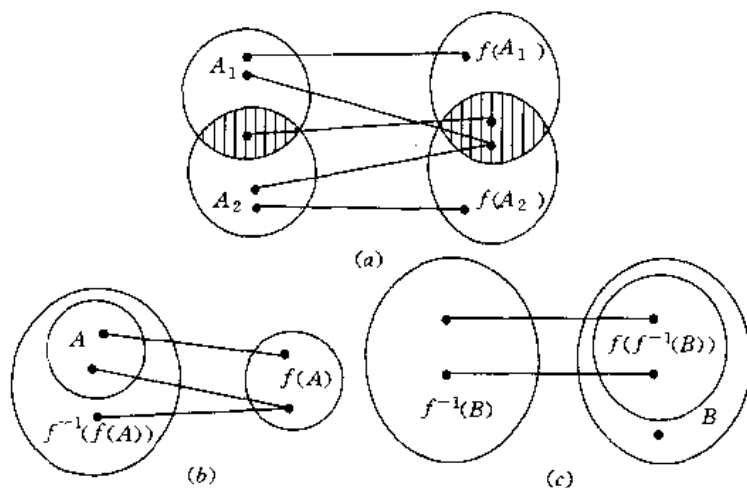


图 1.5 性质(2), (5), (6)图示

1.7.2 扩张原理

对于经典集合 $A \in S(X)$, 经典扩张原理把 A 映射为 $f(A)$, 那么对于任一模糊集合 $\tilde{A} \in F(X)$, 经过映射 f 后变成什么呢? 扎德 1975 年引入了模糊情形下的扩张原理。

定义 1.17 (扩张原理) 设 X, Y 为经典集合, 映射

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

可以诱导一个 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的映射:

$$f: F(X) \rightarrow F(Y)$$

$$\underset{\sim}{A} \mapsto \underset{\sim}{f(A)}$$

以及一个 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的映射:

$$f^{-1}: F(Y) \rightarrow F(X)$$

$$\underset{\sim}{B} \mapsto \underset{\sim}{f^{-1}(B)}$$

$\underset{\sim}{f(A)}$ 和 $\underset{\sim}{f^{-1}(B)}$ 的隶属函数分别定义为:

$$\underset{\sim}{f(A)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in \underset{\sim}{f^{-1}(y)}} \underset{\sim}{A}(x), & \underset{\sim}{f^{-1}(y)} \neq \emptyset \\ 0, & \underset{\sim}{f^{-1}(y)} = \emptyset \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)}(x) = \underset{\sim}{B}(f(x)) \quad (x \in X)$$

以上两个映射称为扩张映射。

例 1.8 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, 映射 $f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} y_1, & x = x_1, x_2, x_3 \\ y_2, & x = x_4, x_5 \\ y_3, & x = x_6 \end{cases}$$

有:

$$\underset{\sim}{A} = 1/x_1 + 0.2/x_3 + 0.1/x_5 + 0.9/x_6$$

$$\underset{\sim}{B} = 0.2/y_1 + 0.6/y_2 + 1/y_3 + 0.7/y_4$$

按扩张原理求 $\underset{\sim}{f(A)}$ 和 $\underset{\sim}{f^{-1}(B)}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \underset{\sim}{f(A)}(y_1) &= \bigvee_{x \in \underset{\sim}{f^{-1}(y_1)}} \underset{\sim}{A}(x) \\ &= \underset{\sim}{A}(x_1) \vee \underset{\sim}{A}(x_2) \vee \underset{\sim}{A}(x_3) \\ &= 1 \vee 0 \vee 0.2 = 1 \end{aligned}$$

同理有:

$$\underset{\sim}{f(A)}(y_2) = 0.1$$

$$\underset{\sim}{f(A)}(y_3) = 0.9$$

因为:

$$\underset{\sim}{f^{-1}(y_4)} = \emptyset$$

故:

$$\underset{\sim}{f(A)}(y_4) = 0$$

于是:

$$\underset{\sim}{f(A)} = 1/y_1 + 0.1/y_2 + 0.9/y_3 + 0/y_4$$

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)}(x_1) = \underset{\sim}{B}(f(x_1)) = \underset{\sim}{B}(y_1) = 0.2$$

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)}(x_2) = \underset{\sim}{B}(f(x_2)) = \underset{\sim}{B}(y_1) = 0.2$$

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)}(x_3) = \underset{\sim}{B}(f(x_3)) = \underset{\sim}{B}(y_1) = 0.2$$

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)}(x_4) = \underset{\sim}{B}(f(x_4)) = \underset{\sim}{B}(y_2) = 0.6$$

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)}(x_5) = \underset{\sim}{B}(f(x_5)) = \underset{\sim}{B}(y_2) = 0.6$$

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)}(x_6) = \underset{\sim}{B}(f(x_6)) = \underset{\sim}{B}(y_3) = 1$$

于是

$$\underset{\sim}{f^{-1}(B)} = 0.2/x_1 + 0.2/x_2 + 0.2/x_3 + 0.6/x_4 + 0.6/x_5 + 1/x_6$$

由式 1.5 和例 1.8 可以看出, $\underset{\sim}{A}$ 经过扩张映射 f 映射为 $\underset{\sim}{f(A)}$ 时, 其隶属函数可无保

留地传递过去。若是单射,元素 $x \in X$ 的隶属度 $A(x)$ 等值地传递给它象,即 $f(A)(y) = A(x)$;若不是单射,此时一个象有多个原象,象的隶属度取原象的最大值。而对于扩张映射 f^{-1} ,原象的隶属度取其象的隶属度;在非单射情形下,每个原象的隶属度均取其同一象的隶属度,因而它们相同。

经典扩张原理定义的映射 f 和 f^{-1} 所具有的性质,在模糊情形也成立。

性质 1.6 设 $f: X \rightarrow Y$

$$x \mapsto f(x)$$

并有 $\{A_i | i \in T\} \in F(X)$, $\{B_i | i \in T\} \in F(Y)$, $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$, 则 f 有下述性质:

$$(1) f(\bigcup_{i \in T} A_i) = \bigcup_{i \in T} f(A_i)$$

$$(2) f(\bigcap_{i \in T} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in T} f(A_i)$$

$$(3) f^{-1}(\bigcup_{i \in T} B_i) = \bigcup_{i \in T} f^{-1}(B_i)$$

$$(4) f^{-1}(\bigcap_{i \in T} B_i) = \bigcap_{i \in T} f^{-1}(B_i)$$

$$(5) f^{-1}(f(A)) \supseteq A, f \text{ 为单射时等号成立;}$$

$$(6) f(f^{-1}(B)) \subseteq B, f \text{ 为满射时等号成立;}$$

$$(7) f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$$

证明:

先证性质(1)。对于 $y \in f(X)$, 有:

$$\begin{aligned} f(\bigcup_{i \in T} A_i)(y) &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} (\bigvee_{i \in T} A_i(x)) \\ &= \bigvee_{i \in T} \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} A_i(x) \\ &= \bigvee_{i \in T} f(A_i)(y) \\ &= (\bigcup_{i \in T} f(A_i))(y) \end{aligned}$$

再证性质(6)。对 $\forall y \in Y$, 有:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B))(y) &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} f^{-1}(B)(x) \\ &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} B(f(x)) \end{aligned}$$

所以:

$$f(f^{-1}(B))(y) = \begin{cases} B(y), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 \leq B(y), & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

故有 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ 。当 f 为满射时等号成立, 因为不再存在 $f^{-1}(y) = \emptyset$ 的情况。

其余性质读者可自己证明。

1.8 模糊集合的模运算

扎德所定义的模糊集合的并、交、补运算是由它们的隶属函数逐点取大、取小、取补 ($\bar{A}(x) = 1 - A(x)$) 求得。这种定义是基于经典集合相应的特征函数运算的推广,从理论上也可以证明,在一定的条件下,隶属函数的运算被唯一地确定为取大、取小运算[6]。

但是,这种定义并不是唯一的。为了能适应各种模糊现象各种应用场合,有必要在更普遍的意义上讨论模糊集的运算。模糊集合的运算是通过其隶属函数的运算来定义的,隶属函数的值域为 $[0, 1]$, 因此模糊集合的广义并、交运算可以通过 $[0, 1]$ 区间上的二元运算来定义。

定义 1.18 设 $T(x, y)$ 为定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的二元函数, 其值域为 $[0, 1]$, 若 $\forall x, y, z \in [0, 1]$, 有:

- (1) 交换律: $T(x, y) = T(y, x)$
- (2) 结合律: $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$
- (3) 单调性: 若 $x \leq y$, 则 $T(x, z) \leq T(y, z)$
- (4) 边界条件: $T(1, x) = x, T(0, 0) = 0$

则称 T 为 $[0, 1]$ 上的三角模, 又称 **T 模**。

定义 1.19 设 $S(x, y)$ 为定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的二元函数, 其值域为 $[0, 1]$, 若 $\forall x, y, z \in [0, 1]$, 有:

- (1) 交换律: $S(x, y) = S(y, x)$
- (2) 结合律: $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$
- (3) 单调性: 若 $x \leq y$ 则 $S(x, z) \leq S(y, z)$
- (4) 边界条件: $S(0, x) = x, S(1, 1) = 1$

则称 S 为 $[0, 1]$ 上的三角余模, 三角余模又称 **S 模**。

定义 1.20 设 $c(x)$ 为定义在 $[0, 1]$ 的函数, 值域为 $[0, 1]$, 若 $\forall x, y \in [0, 1]$, 有 $c(x) = 1 - x$, 则称 c 为 $[0, 1]$ 上的补运算, 称 $c(x)$ 为 x 的补, 记为 \bar{x} , 亦可记为 x^c 。

设 T, S 分别为任一三角模和三角余模, 若有:

$$\overline{T(x, y)} = S(\bar{x}, \bar{y}) \text{ 或 } T(x, y)^c = S(x^c, y^c)$$

则 T 和 S 为对偶模。

由一对三角模和三角余模组成的对偶模, 就可以定义一种相应于交、并运算的其它模糊算子对。以下列举一些广义的交、并运算。

- (1) 代数积与代数和, 称为概率算子 ($\cdot, +$)

$$T(a, b) = a \cdot b$$

$$S(a, b) = a + b - a \cdot b$$

若 $A, B \in F(X)$, 则:

代数积为:

$$(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$$

代数数和为:

$$(\hat{A} + \hat{B})(x) = \hat{A}(x) + \hat{B}(x) - \hat{A}(x) \cdot \hat{B}(x)$$

(2) 有界积与有界和 (\odot, \oplus)

$$T(a, b) = \max(0, a + b - 1)$$

$$S(a, b) = \min(1, a + b)$$

对于 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$, 有:

有界积为:

$$(\tilde{A} \odot \tilde{B})(x) = \max(0, \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - 1)$$

有界和为:

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B})(x) = \min(1, \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x))$$

(3) 爱因斯坦积与爱因斯坦和, 称为 Einstein 算子 $(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon})$

$$T(a, b) = \frac{a \cdot b}{1 + (1-a)(1-b)}$$

$$S(a, b) = \frac{a + b}{1 + a \cdot b}$$

若 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$ 则:

Einstein 积为:

$$(\tilde{A} \dot{\epsilon} \tilde{B})(x) = \frac{\tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x)}{1 + (1 - \tilde{A}(x))(1 - \tilde{B}(x))}$$

Einstein 和为:

$$(\tilde{A} \dot{\epsilon}^+ \tilde{B})(x) = \frac{\tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)}{1 + \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x)}$$

(4) 强化积与强化和 (\cap, \cup)

$$T(a, b) = \begin{cases} a, & b=1 \\ b, & a=1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$S(a, b) = \begin{cases} a, & b=0 \\ b, & a=0 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$$

若 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$, 则:

强化积为:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \begin{cases} \tilde{A}(x), & \tilde{B}(x) = 1 \\ \tilde{B}(x), & \tilde{A}(x) = 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

强化和为:

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \begin{cases} \tilde{A}(x), & \tilde{B}(x) = 0 \\ \tilde{B}(x), & \tilde{A}(x) = 0 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$$

(5) 哈马丘尔积与哈马丘尔和,称为 Hamacher 算子 (λ, λ)

$$T(a, b) = \frac{a \cdot b}{\lambda + (1 - \lambda)(a + b - a \cdot b)}$$

$$S(a, b) = \frac{a + b + (\lambda - 2) \cdot a \cdot b}{\lambda + (1 - \lambda)(1 - a \cdot b)} \quad (\lambda \geq 0)$$

若 $A, B \in F(X)$, 则:

Hamacher 积为:

$$(\tilde{A} \tilde{\lambda} \tilde{B})(x) = \frac{\tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x)}{\lambda + (1 - \lambda)(\tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x))}$$

Hamacher 和为:

$$(\tilde{A} \tilde{\lambda} \tilde{B})(x) = \frac{\tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) + (\lambda - 2)\tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x)}{\lambda + (1 - \lambda)(1 - \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x))}$$

(6) 亚格尔积与亚格尔和,称为 Yager 算子 γ, γ

$$T(a, b) = 1 - \min(1, [(1 - a)^\gamma + (1 - b)^\gamma]^{1/\gamma})$$

$$S(a, b) = \min(1, (a^\gamma + b^\gamma)^{1/\gamma}) \quad (\gamma \geq 0)$$

对于 $A, B \in F(X)$, 则:

Yager 积为:

$$(\tilde{A} \tilde{\gamma} \tilde{B})(x) = 1 - \min(1, [(1 - \tilde{A}(x))^\gamma + (1 - \tilde{B}(x))^\gamma]^{1/\gamma})$$

Yager 和为:

$$(\tilde{A} \tilde{\gamma} \tilde{B})(x) = \min(1, (\tilde{A}(x)^\gamma + \tilde{B}(x)^\gamma)^{1/\gamma})$$

对于 Hamacher 算子, 当 $\lambda=1$ 时有:

$$T(a, b) = a \cdot b \quad S(a, b) = a + b - a \cdot b$$

可见, $\lambda=1$ 时 Hamacher 积与和变成代数积与代数和。类推, 当 $\lambda=2$ 时 Hamacher 积与和则变为 Einstein 积与和。

对 Yager 算子, 当 $\gamma=1$ 时有:

$$T(a, b) = 1 - \min(1, 2 - a - b)$$

$$= 1 - \min(1, 1 - (a + b - 1))$$

而有界积为:

$$T(a, b) = \max(0, a + b - 1)$$

此时对 Yager 积和有界积均有:

$$T(a, b) = \begin{cases} 0, & 0 < a + b \leq 1 \\ a + b - 1, & 1 < a + b \leq 2 \end{cases}$$

故 $\gamma=1$ 时 Yager 积变为有界积。此时 Yager 和为:

$$S(a, b) = \min(1, a + b)$$

即变为有界和。

同样, 当 $\gamma=+\infty$ 时, Yager 算子则转化为 Zadeh 算子, 即取小、取大运算。

图 1.6 表示 Zadeh 算子 (\cap, \cup) 、概率算子 $(\cdot, +)$ 、有界积与有界和 (\odot, \oplus) 以及强

化积与强化和 (\cap, \cup) 四对算子的三角模和三角余模。为便于表达,图中设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$, $\tilde{A}(x)=a$ 为一暂不变的参数, $0 \leq a \leq 1$, $\tilde{B}(x)$ 则为一变量,由0至1变化。

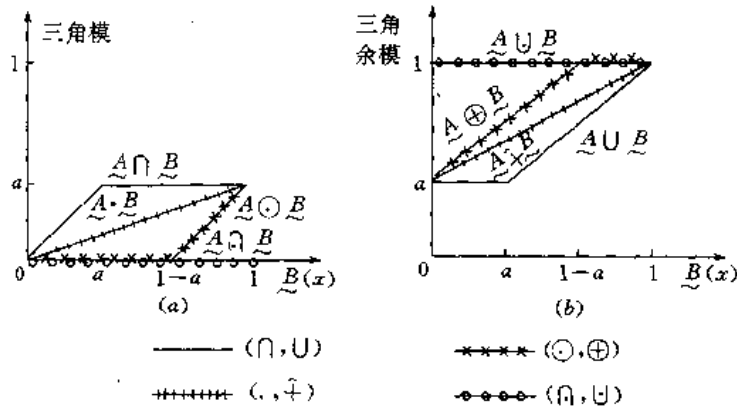


图 1.6 四种算子的三角模和三角余模

由图 1.6 不难看出, $(\cap, +)$ 和 $(+, \cup)$ 是 (\cap, \cup) 和 (\cap, \cup) 的中介。通过直接验证可知以上几种算子有如下关系:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \odot \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \oplus \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cdot \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \subseteq \tilde{A} + \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \oplus \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \odot \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$$

亦即:

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) &\leq (\tilde{A} \odot \tilde{B})(x) \leq (\tilde{A} \oplus \tilde{B})(x) \\ &\leq (\tilde{A} \cdot \tilde{B})(x) \leq (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) &\leq (\tilde{A} + \tilde{B})(x) \leq (\tilde{A} \oplus \tilde{B})(x) \\ &\leq (\tilde{A} \odot \tilde{B})(x) \leq (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \end{aligned}$$

性质 1.7 对任意一个三角模 T 和三角余模 S , 均有如下性质:

$$(1) (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \leq T(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) \leq (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x)$$

$$(2) (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \leq S(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) \leq (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x)$$

证明: (1) 由强化积的定义可得:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \begin{cases} \tilde{A}(x), & \tilde{B}(x)=1 \\ \tilde{B}(x), & \tilde{A}(x)=1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由三角模的定义 1.18 可得:

$$T(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) = \begin{cases} \tilde{A}(x), & \tilde{B}(x)=1 \\ \tilde{B}(x), & \tilde{A}(x)=1 \\ T(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) \geq 0, & \text{其它} \end{cases}$$

显然有:

$$(A \cap B)(x) \leq T(A(x), B(x))$$

根据三角模的单调性和边界条件又可得如下结论: 对于 $A(x), B(x) \in [0, 1]$, 则 $T(A(x), B(x)) \leq T(A(x), 1) = A(x)$, 而且 $T(A(x), B(x)) \leq T(1, B(x)) = B(x)$, 从而:

$$T(A(x), B(x)) \leq A(x) \wedge B(x) = (A \cap B)(x)$$

故:

$$(A \cap B)(x) \leq T(A(x), B(x)) \leq (A \cap B)(x)$$

类似可证(2)。

为了反映不同模糊算子的特征, 引入了清晰域的概念。

定义 1.21 给定模糊算子“*”, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 称点集

$$\sigma(*) = \{(x, y) | x * y = 0 \text{ 或 } x * y = 1\}$$

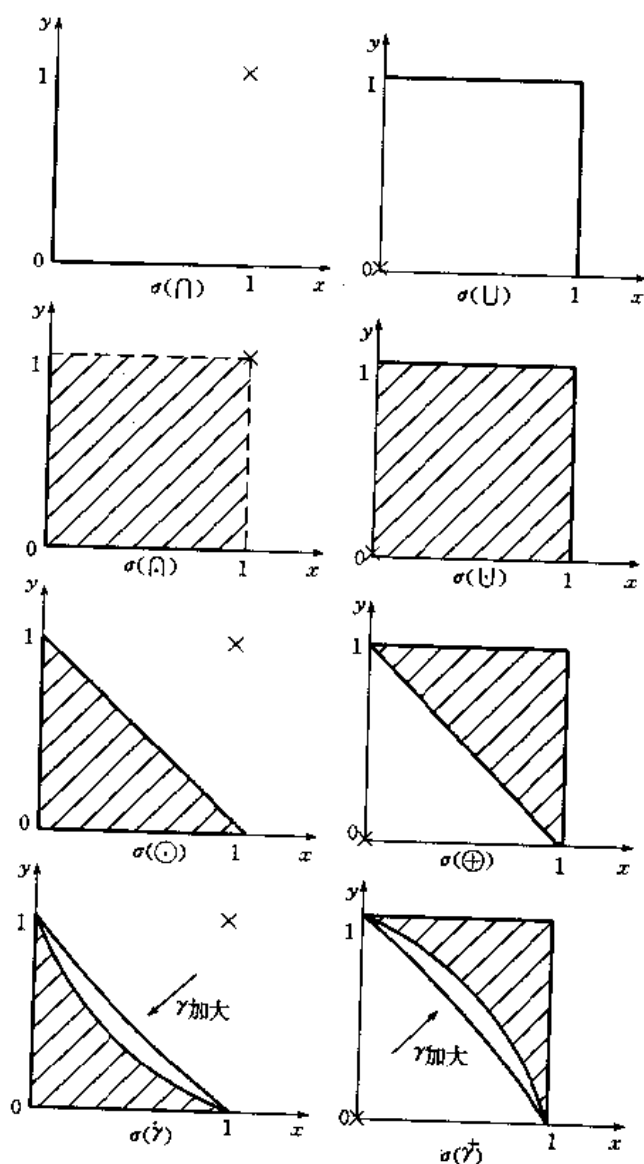


图 1.7 几种模糊算子的清晰域

为模糊算子 $*$ 的清晰域。

清晰域内的点,对应于运算结果是清晰的,即明确的属于或不属于。清晰域是刻划模糊算子模糊程度的一个尺度。图 1.7 给出了几种模糊算子的清晰域。

1.9 模糊集合的数字特征

模糊集的数字特征,可以简要地描述模糊集的某些特性。

1.9.1 模糊度

模糊度的概念用于描述一个模糊子集模糊性的大小,即论域中的元素属于该论域上的某一模糊集合的程度的一个总体的描述。

定义 1.22 所谓论域 X 上的一个模糊集 \tilde{A} 的模糊度 $D(\tilde{A}) \in [0, 1]$ 是指,对于 $\forall x \in X$,

- (1) 当且仅当 $\tilde{A}(x) = 0$ 或 1 时,即 \tilde{A} 退化为经典集时 $D(\tilde{A}) = 0$,模糊度最小;
- (2) 当 $\tilde{A}(x) = 0.5$ 时, $D(\tilde{A}) = 1$,模糊度最大;
- (3) 对于 X 上的两个模糊集 \tilde{A}_1 和 \tilde{A}_2 ,若:

$$\tilde{A}_1(x) \geq \tilde{A}_2(x) \geq 0.5$$

或:

$$\tilde{A}_1(x) \leq \tilde{A}_2(x) \leq 0.5$$

则有:

$$D(\tilde{A}_1) \leq D(\tilde{A}_2)$$

- (4) 对任意 $\tilde{A} \in F(X)$,

$$D(\tilde{A}) = D(\tilde{A}^c)$$

由定义可见,一个经典集合,其模糊度为 0,它是不模糊的,因为元素的隶属度或为 0 或为 1。当隶属度为 0.5 时,模糊度最大,隶属度越靠近 0.5,模糊度越大。对于模糊集 \tilde{A} 的补集 \tilde{A}^c ,因为 $\tilde{A}^c(x) = 1 - \tilde{A}(x)$, $\tilde{A}^c(x)$ 与 $\tilde{A}(x)$ 靠近 0.5 的程度相同,因此 \tilde{A}^c 与 \tilde{A} 的模糊度相同。

定义 1.22 给出了模糊度定义的条件,满足这些条件的具体的度量规则均可作为模糊度,模糊熵就是其中一种。

模糊熵是把热力学中熵的概念引入到模糊数学中。在热力学中为了描述分子运动的不规则性,引入了熵的概念,现用它来描述模糊集的模糊程度。

定义 1.23 设 \tilde{A} 为论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的模糊集,记

$$H(\tilde{A}) = \frac{1}{n \ln 2} \sum_{i=1}^n S(\tilde{A}(x_i)) \quad (1.6)$$

$H(\tilde{A})$ 称为 \tilde{A} 的模糊熵。其中函数 $S(\mu) = -\mu \ln \mu - (1 - \mu) \ln (1 - \mu)$ 。

可以验证 $H(\tilde{A})$ 满足定义 1.22 给出的模糊度的条件,因此可以取 $H(\tilde{A})$ 为一种模糊度,即:

$$D(\tilde{A}) = H(\tilde{A})$$

例 1.9 设 \tilde{A} 和 \tilde{B} 均为 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ 上的模糊子集, $\tilde{A} = 0.2/u_1 + 0.6/u_2 +$

$0.1/u_3, B = 0.6/u_1 + 0.3/u_2 + 0.8/u_3$, 求 $D(A)$ 和 $D(B)$

解: 取 $D(A) = H(A)$;

$$D(A) = \frac{1}{3 \ln 2} \sum_{i=1}^3 S(A(u_i)) = 0.72$$

$$D(B) = \frac{1}{3 \ln 2} \sum_{i=1}^3 S(B(u_i)) = 0.86$$

可见 $D(B) > D(A)$, 也就是说, B 比 A 模糊性更大。

当论域 X 为连续域的情况时, 模糊熵定义如下。

定义 1.24 若论域 X 为有界可测的连续域, 则 X 上的模糊集 A 的模糊熵可定义为:

$$H(A) = \frac{1}{m(X) \ln 2} \int_X S(A(x)) dx$$

其中 $m(X) = \int_X dx$, 特别当 $X = [a, b]$ 时:

$$H(A) = \frac{1}{(b-a) \ln 2} \int_a^b S(A(x)) dx$$

Yager 注意到模糊集合与经典集合的一个非常大的区别是 A 和它的补集 \bar{A} 不是绝对可分离的, 因此, 他认为模糊性的测度都与 A 与 \bar{A} 之间的差别程度密切相关, 作为 A 与 \bar{A} 之间的距离, 他提出如下公式:

$$\begin{aligned} d_p(A, \bar{A}) &= \left(\sum_{i=1}^n |A(x_i) - \bar{A}(x_i)|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |2A(x_i) - 1|^p \right)^{1/p}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

据此, Yager 提出了一种模糊度:

$$D_p(A) = 1 - \frac{1}{n^{1/p}} d_p(A, \bar{A}) \quad (1.8)$$

可以验证式(1.8)满足定义 1.22 所给出的条件。

例 1.10 仍以例 1.9 给出的 A 和 B , 用 Yager 给出的公式(1.8)求模糊度。

$$\text{解: } d_1(A, \bar{A}) = 1.6, \quad D_1(A) = 0.47$$

$$d_1(B, \bar{B}) = 1.2, \quad D_1(B) = 0.6$$

$$d_2(A, \bar{A}) = 1.02, \quad D_2(A) = 0.41$$

$$d_2(B, \bar{B}) = 0.75, \quad D_2(B) = 0.57$$

可见, 不论是 $P=1$ 或 $P=2$, 均是 B 比 A 模糊性更大, 与模糊熵的结论一致。

1.9.2 模糊集的重心

仿照力学上的重心的概念, 若把 $\mu_A(x)$ 想像成在 x 点的重量, 则 A 的“重心”可定义如下。

定义 1.25 当 X 为连续的有界实数域, 则 X 上的模糊集 $\tilde{A} \in F(X)$ 的**重心** $G(\tilde{A})$ 定义为

$$G(\tilde{A}) = \frac{\int_{X \sim} A(x) x dx}{\int_{X \sim} A(x) dx}, \quad \text{其中 } \int_{X \sim} A(x) dx \neq 0 \quad (1.9)$$

特别, 当 $X = [a, b]$ 时,

$$G(\tilde{A}) = \frac{\int_a^b A(x) x dx}{\int_a^b A(x) dx}, \quad \text{其中 } \int_a^b A(x) dx \neq 0 \quad (1.10)$$

此时, 对 $\forall \tilde{A} \in F[a, b]$, 有 $a \leq G(\tilde{A}) \leq b$ 。

在离散的论域的情况下, 当 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset R$ (R 为实数域) 时, 重心则定义为

$$G(\tilde{A}) = \frac{\sum_{i=1}^n A(x_i) x_i}{\sum_{i=1}^n A(x_i)}, \quad \text{其中 } \sum_{i=1}^n A(x_i) \neq 0 \quad (1.11)$$

模糊集的重心可以表示模糊集的隶属度在论域内集中的地方, 特别地, 当 $\tilde{A}(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一个凸函数时, 其重心一般在凸函数取极大值的点左右。

在模糊控制中, 由模糊推理逻辑求得的模糊控制器的输出是一个模糊集, 这个模糊输出要通过解模糊的过程变成一个精确量以决定执行机构的动作量。解模糊的一个常用方法就是所谓的重心法, 求出输出模糊集的重心作为解模糊量。

1.10 模糊集合的隶属函数

模糊集合是通过它的隶属函数来表征的, 模糊集合的运算也是通过其隶属函数的相应运算来实现。在某种意义上讲, \tilde{A} 和 $\tilde{A}(x)$ 等价。用模糊数学方法解决任何问题, 一般总是要建立模糊集合的隶属函数。

模糊性是客观世界普遍存在的一种现象, 隶属函数就是对这种模糊性的数学描述, 它本质上是客观的。但人们在建立隶属函数时, 通过大脑进行加工, 由于人们认识的局限性, 即使同一模糊集, 不同的人很可能建立不同的隶属函数, 它们是客观世界的一个近似。

建立隶属函数的方法也是人们在实践中不断总结摸索出来的, 不同的情形可以采用不同的方法, 也没有一个固定的模式。人们可以在实际应用中不断完善提高, 乃至提出其它新的方法。以下介绍几种确定隶属函数的常用的方法。

1.10.1 推理法

所谓推理法, 顾名思义乃是依“理”推出隶属函数的表达式。这里的“理”是指所考虑的模糊集的特性。模糊集合总是代表某个领域中的某一概念, 如物理、化学、几何、医学、地质、自控等等中的某一概念, 这些概念往往有明显的特性, 根据这些特性可以推导出其隶属函数的表达式。推导过程中, 先要选定论域, 然后确定隶属度为 1 和 0 的那些特殊点, 然

后根据隶属函数的大致形状来确定隶属函数的表达式。我们用以下的例子来说明。

例 1.11 假如我们把要考察的某一些三角形形状的几何图形分成正三角形、等腰三角形、直角三角形和其它非典型三角形四种,分别用模糊集合 $\tilde{E}, \tilde{I}, \tilde{R}, \tilde{T}$ 表示,建立它们的隶属函数。

解: 根据几何学中三角形的特性可知,三角形三个内角和为 180° 。直角三角形的性质是有一个内角为 90° ,等腰三角形的性质则是有两个内角相等,正三角形则三个内角相等,均为 60° 。

设 A, B, C 为所考虑的三角形 $\triangle ABC$ 的三个内角,且设 $A \geq B \geq C$,则可选论域 U 为:

$$U = \{(A, B, C) | A + B + C = 180, A \geq B \geq C\}$$

当 $A = 90^\circ$ 时, $\triangle ABC$ 肯定为直角三角形,隶属度为 1;当 A 由 90° 逐渐减小, $89^\circ, 88^\circ, \dots, 60^\circ$ (因为假定 A 为最大角, A 只能减到 60°), $\triangle ABC$ 的形状偏离直角三角形就越大,当 A 由 90° 逐渐增大, $91^\circ, 92^\circ, \dots, 180^\circ$, $\triangle ABC$ 偏离直角三角形的形状也越大,直到极端情况 A 为 180° ,可以认为 $\triangle ABC$ 属于直角三角形的隶属度为 0。如果认为隶属函数是随着 A 变化而线性变化的,那么直角三角形 \tilde{R} 的隶属函数可取为:

$$\tilde{R}(A, B, C) = 1 - \frac{1}{90} |A - 90|$$

类似,我们可以得

$$\tilde{E}(A, B, C) = 1 - \frac{1}{180} (A - C)$$

$$\tilde{I}(A, B, C) = 1 - \frac{1}{60} ((A - B) \wedge (B - C))$$

而非典型三角形 \tilde{T} ,可由下式求得

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \overline{\tilde{R} \cup \tilde{E} \cup \tilde{I}} \\ &= \overline{\tilde{R}} \cap \overline{\tilde{E}} \cap \overline{\tilde{I}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{那么 } \tilde{T}(A, B, C) &= (1 - \tilde{R}(A, B, C)) \wedge (1 - \tilde{E}(A, B, C)) \wedge (1 - \tilde{I}(A, B, C)) \\ &= \frac{1}{180} \min(2|A - 90|, (A - C), 3(A - B), 3(B - C)) \end{aligned}$$

1.10.2 模糊统计方法

用模糊统计方法确定模糊集合的隶属函数类似于随机事件的概率统计方法。概率统计方法中规定,在随机试验中有:

$$\text{事件发生频率} = \frac{\text{发生次数}}{\text{实验总次数 } n}$$

当 n 增大时,呈现频率稳定性,频率稳定的值就称为概率。在每次随机实验中,事件发生与否是确定的。

模糊统计方法要进行模糊统计实验。比如要确定论域 U 上的模糊集合 \tilde{A} 的隶属函数 $\tilde{A}(u)$,在 U 中选择一个元素 $u_0 \in U$,再考虑 U 上的一个集合 A^* , A^* 对应于 \tilde{A} ,是一个动态的经典集合。每次模糊统计实验要判定 u_0 是否属于 A^* ,要作出明确的判定,要么 $u_0 \in$

A^* , 要么 $u_0 \in A^*$, 因此 A^* 是一个经典集合, 但 A^* 在每次实验中可能有变化, 有时 $u_0 \in A^*$, 而有时 $u_0 \notin A^*$, 因此 A^* 是动态的、边界可变的经典集合。如果进行了 n 次模糊统计实验, 定义:

$$u_0 \text{ 对 } A \text{ 的隶属频率} = \frac{u_0 \in A^* \text{ 的次数}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_{A^*}^j(u_0)$$

式中 $\mu_{A^*}^j(u_0)$ 表示第 j 次判定集合 A^* 的特征函数对 u_0 的取值。随着 n 的增大, 隶属频率也呈稳定性, 频率所稳定的值取作 u_0 对 A 的隶属度。

对 $\forall u \in U$ 都得到隶属度, 就得到了 A 的隶属函数。

例如取年龄作为论域, $U = [0, 100]$, 确定 U 上模糊集合“青年人” A 的隶属函数 $A(u)$, 选定 U 中一元素, 比如 27 岁, 每次实验让不同的人判断 27 岁是否为青年人 A^* , 当实验次数大到一定程度时, 隶属频率趋于稳定, 可取作 $A(27)$ 。同样可以求出其它年龄的隶属度。

有人曾选择了 129 名学生进行调查, 来确定“青年人” A 的隶属函数, 要求每个被调查者按自己的理解确定青年人年龄的区间, 即 A^* , 每个被调查者的答案就是一次实验的结果, 129 次实验结果列于表 1.1, 由表 1.1 计算的隶属频率见表 1.2。由表 1.2 可见, 隶属频率随实验次数 n 增加而呈现稳定性, 故取青年人 $A(27) = 0.78$ 。同理可得到论域上其它点对青年人的隶属度, 这样就确定了青年人的隶属函数。

表 1.1 关于“青年人”年龄区间调查

18—25	17—30	17—28	18—25	16—35	14—25
18—30	18—35	18—35	16—25	15—30	18—35
17—30	18—25	18—35	20—30	18—30	16—30
20—35	18—30	18—25	18—35	15—25	18—30
15—28	16—28	18—30	18—30	16—30	18—35
18—25	18—30	16—28	18—30	16—30	16—28
18—35	18—35	17—27	16—28	15—28	18—25
19—28	15—30	15—26	17—25	15—36	18—30
17—30	18—35	16—35	16—30	15—25	18—28
16—30	15—28	18—35	18—30	17—28	18—35
15—28	15—25	15—25	15—25	18—30	16—24
15—25	16—32	15—27	18—35	16—25	18—30
16—28	18—30	18—35	18—30	18—30	17—30
18—30	18—35	16—30	18—28	17—25	15—30
18—25	17—30	14—25	18—26	18—29	18—35
18—28	18—35	18—25	16—35	17—29	18—25
17—30	16—28	18—30	16—28	15—30	18—30
15—30	20—30	20—30	16—25	17—30	15—30
18—30	16—30	18—28	15—35	16—30	15—30
18—25	18—35	18—30	17—30	16—35	17—30
15—25	18—35	15—30	15—25	15—30	18—30
17—26	18—29	18—28			

表 1.2 27 岁对模糊集“青年人”的隶属频率

n	10	20	30	40	50	60	70
隶属次数	6	14	23	31	39	47	53
隶属频率	0.60	0.70	0.77	0.78	0.78	0.78	0.76
n	80	90	100	110	120	129	
隶属次数	62	68	76	85	95	101	
隶属频率	0.78	0.76	0.76	0.75	0.79	0.78	

以上模糊统计法实际上是所谓的二相模糊统计法,因为模糊统计中考察的是模糊集合青年人 \tilde{A} ,要求判定是青年人或不是青年人,除 \tilde{A} 外还隐含着 $\bar{\tilde{A}}$,共两个模糊集,故称二相。但有些问题中,所考察的模糊集不止两个,而有多,因此可将上述二相模糊统计方法推广为多相模糊统计法。

设有 m 个模糊集合 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m \in F(U)$,多相模糊统计法适用于确定这 m 个模糊集合的隶属函数,令 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$ 分别是对应于 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m$ 的统计用的动态经典集,对每个元素 $u \in U$ 进行 n 次实验,设第 j 次实验的判定结果如下

$$\mu_{A_i^*}^j(u) = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 次实验判定 } u \in A_i^* \\ 0, & \text{第 } j \text{ 次实验判定 } u \in \bar{A}_i^* \end{cases}$$

其中 $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$, 而且 u 一定属于且只能属于 A_i^* 中的一个,即:

$$\sum_{i=1}^m \mu_{A_i^*}^j(u) = 1$$

当 n 足够大时,取:

$$\tilde{A}_i(u) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_{A_i^*}^j(u), \quad i=1, 2, \dots, m, \forall u \in U$$

这就是多相模糊统计方法。

1.10.3 二元对比法

二元对比法是根据人类习惯于两两比较的心理特点设计的。要求人们同时比较论域中的所有元素并由此确定各个元素的隶属度往往是很困难的,但当取 U 中的两个元素相比时,情况较为简单,容易正确地比较出两者中哪一个属于某一模糊集合的程度大,以两两比较的结果为基础确定隶属函数的方法称为二元对比法。

设论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\tilde{A} \in F(U)$, 用二元比较法确定隶属函数 $\tilde{A}(u_i), i=1, 2, \dots, m$ 的方法如下。

取 U 中任意一对元素 (u_i, u_k) , 其中 $1 \leq i < k \leq m$, 对 $\forall (u_i, u_k)$ 均进行 n 次比较, 规定第 j 次比较结果为:

$$\alpha^j(i, k) = \begin{cases} 1, & \text{判定 } u_i \text{ 比 } u_k \text{ 属于 } \tilde{A} \text{ 的程度大} \\ 0, & \text{判定 } u_i \text{ 不比 } u_k \text{ 属于 } \tilde{A} \text{ 的程度大} \end{cases}$$

并且自然有:

$$\alpha^j(k, i) = 1 - \alpha^j(i, k)$$

n 次比较的总结果为:

$$\begin{aligned}\alpha(i, k) &= \sum_{j=1}^n \alpha^j(i, k) \\ \alpha(k, i) &= \sum_{j=1}^n \alpha^j(k, i) = \sum_{j=1}^n (1 - \alpha^j(i, k)) \\ &= n - \alpha(i, k)\end{aligned}$$

当 $i=k=1, 2, \dots, m$ 时, 令:

$$\alpha(i, k) = 0$$

我们可以由以上结果构造一个矩阵, 其对角线上第 i 行第 k 列元素 ($i=k=1, 2, \dots, m$) $\alpha(i, k)$ 均为 0。上三角第 i 行第 k 列元素 ($1 \leq i < k \leq m$) 对应取 $\alpha(i, k)$, 下三角元素对应取 $\alpha(k, i)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \alpha(i, k) \\ & \alpha(k, i) & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

两两比较中总的次数, 即为矩阵中各元素之和, 记为 γ :

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m (\alpha(i, k) + \alpha(k, i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m n = \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)n \\ &= \frac{1}{2} (m^2 - m)n\end{aligned}$$

上式也可直接由 $\gamma = C_m^2 n = \frac{1}{2} (m^2 - m)n$ 计算得出。

设矩阵各行元素之和分别为 $\gamma_i, i=1, 2, \dots, m$, 则 γ_i 代表第 i 个元素 u_i 在两两比较中比其余各元素属于 A 程度大的次数, 显然有:

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i = \gamma$$

当 n 足够大时, 取隶属函数为:

$$\tilde{A}(u_i) = \frac{\gamma_i}{\gamma}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

例 1.12 用二元对比法确定 5 种牌号的空调机对“噪音小” A 的隶属度。

解: 设论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, 若两两比较的次数为 1 000, 即 $m=5, n=1\ 000$, 比较结果矩阵如下:

~

					各行和 γ_i
0	545	800	640	459	2 444
455	0	377	350	550	1 732
200	623	0	300	300	1 423
360	650	700	0	360	2 070
541	450	700	640	0	2 331

$$\gamma = \frac{1}{2}(5^2 - 5) \times 1\,000 = 10\,000$$

于是

$$\tilde{A}(u_i) = \{0.25/u_1, 0.17/u_2, 0.14/u_3, 0.21/u_4, 0.23/u_5\}$$

由于 $\sum_{i=1}^m \tilde{A}(u_i) = \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} = 1$, 因此当 m 较大时一般有 $\tilde{A}(u_i)$ 偏小, 这也可由上例看出。此时也可以修正如下:

$$\tilde{A}(u_i) = \frac{\gamma_i}{(m-1)n}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

其中 $(m-1)n$ 是每个元素 u_i 参与两两比较的总次数。这样若 u_i 在每次比较中都比赢, 则 $\tilde{A}(u_i) = 1$; 反之, 若 u_i 每次都输, 则 $\tilde{A}(u_i) = 0$ 。

用修正公式确定例 1.12 中的隶属度如下:

$$\tilde{A}(u_i) = \{0.61/u_1, 0.43/u_2, 0.36/u_3, 0.52/u_4, 0.58/u_5\}$$

1.10.4 模糊分布

当模糊集的论域为实数域 R 时, 其隶属函数称为模糊分布, 即当 $A \in F(R)$, $\mu_A(x)$ 为 R 上的模糊分布, $x \in R$ 。实数域上某些带有参数的函数可以作为模糊分布, 在确立模糊集合的隶属函数时可以根据模糊集的性质选择, 并根据实际应用的具体情况或通过实验确定所选函数中的参数。

根据模糊分布的变化趋势, 可以大体分为三类, 即偏小型(戒上型)、中间型(对称型)和偏大型(戒下型)。偏小型模糊分布随 $x(x \in R)$ 增大而减小, 偏大型模糊分布随 x 增大而增大。中间型在 R 的某一点或某一段取最大值, 而其两侧则对称地减小。

1. 偏小型

(1) 降半矩形:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

见图 1.8(a)。

(2) 降半正态形:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ e^{-k(x-a)^2}, & x > a \end{cases}$$

见图 1.8(b)。

(3) 降半哥西形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{1}{1 + \alpha(x-a)^\beta}, & x > a \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$, 见图 1.8(c)。

(4) 降半梯形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a_1 \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, & a_1 < x \leq a_2 \\ 0, & x > a_2 \end{cases}$$

见图 1.8(d)。

(5) 降岭形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a_1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{a_2 - a_1} \left(x - \frac{a_2 + a_1}{2} \right), & a_1 < x \leq a_2 \\ 0, & x > a_2 \end{cases}$$

见图 1.8(e)。

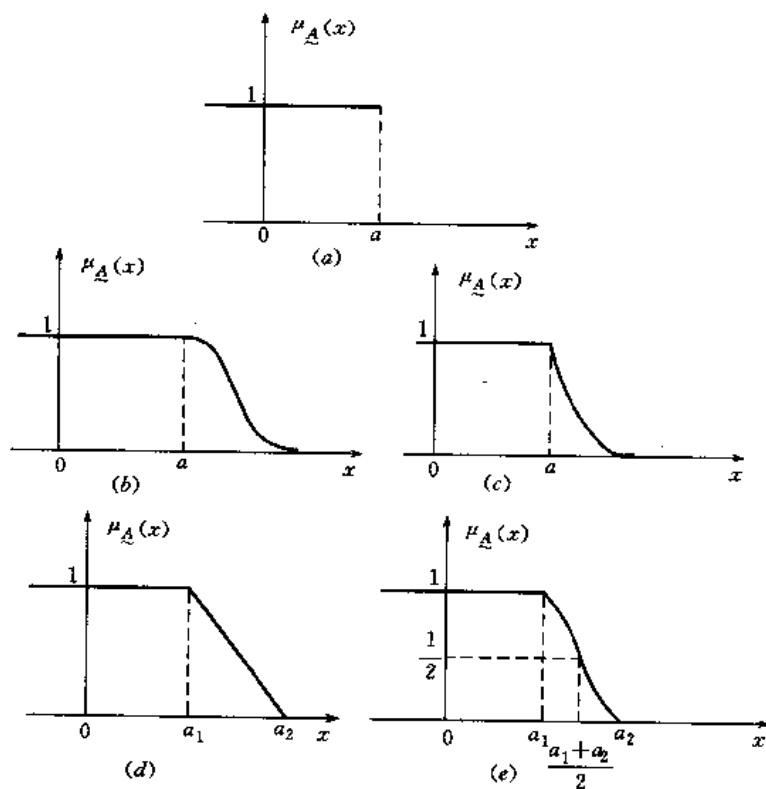


图 1.8 偏小型隶属函数

2. 对称型(中间型)

(1) 矩形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a-b \\ 1, & a-b < x \leq a+b \\ 0, & x > a+b \end{cases}$$

见图 1.9(a)。

(2) 三角形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a-b \\ \frac{1}{b}(x-a+b), & a-b < x \leq a \\ \frac{1}{b}(a+b-x), & a < x \leq a+b \\ 0, & a+b < x \end{cases}$$

见图 1.9(b)。

(3) 正态形:

$$\mu_A(x) = e^{-k(x-a)^2}$$

其中 $k > 0$, 见图 1.9(c)

(4) 哥西形:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \alpha(x-a)^\beta}$$

其中 $\alpha > 0, \beta$ 为正偶数, 见图 1.9(d),

(5) 梯形

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a-a_2 \\ (a_2+x-a)/(a_2-a_1), & a-a_2 < x \leq a-a_1 \\ 1, & a-a_1 < x \leq a+a_1 \\ (a_2-x+a)/(a_2-a_1), & a+a_1 < x \leq a+a_2 \\ 0, & x > a+a_2 \end{cases}$$

其中 $a_2 > a_1 > 0$, 见图 1.9(e)。

(6) 岭型:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a_2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{a_2-a_1} \left(x + \frac{a_2+a_1}{2} \right), & -a_2 < x \leq -a_1, \\ 1, & -a_1 < x \leq a_1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{a_2-a_1} \left(x - \frac{a_2+a_1}{2} \right), & a_1 < x \leq a_2, \\ 0, & x > a_2, \end{cases}$$

其中 $a_2 > a_1 > 0$, 见图 1.9(f)。

3. 偏大型

(1) 升半矩形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

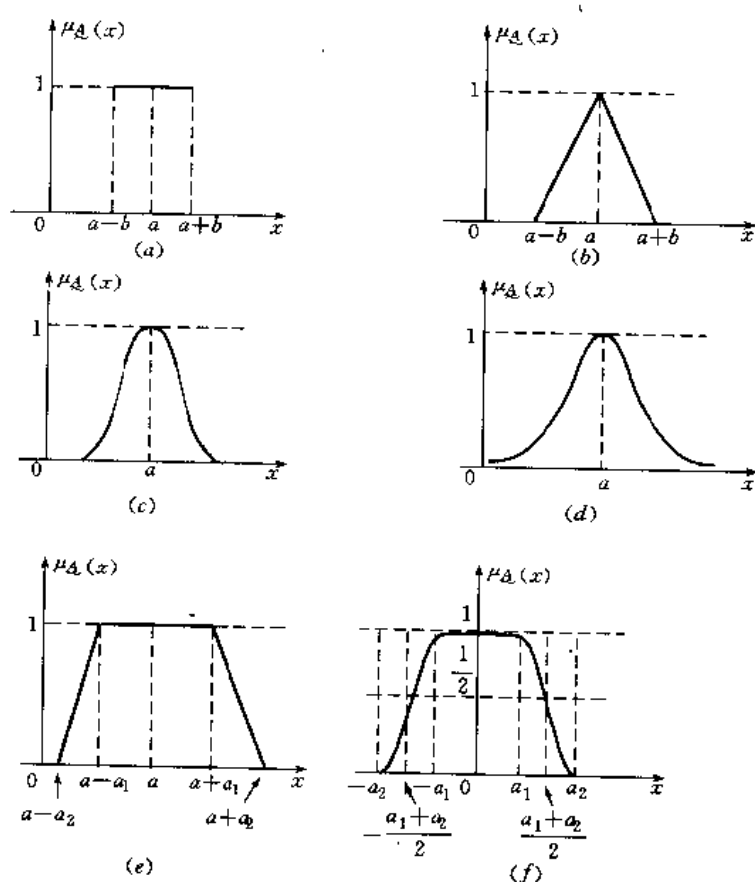


图 1.9 中间型隶属函数

见图 1.10(a)。

(2) 升半正态形

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & x > a \end{cases}$$

其中 $k > 0$, 见图 1.10(b)。

(3) 升半哥西形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1 - \frac{1}{1 + \alpha(x-a)^\beta}, & x > a \end{cases}$$

式中 $\alpha > 0, \beta > 0$, 见图 1.10(c)。

(4) 升半梯形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_1, \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 < x \leq a_2, \\ 1, & x > a_2, \end{cases}$$

其中 $a_2 > a_1$, 见图 1.10(d)。

(5) 升半岭形:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{a_2 - a_1} \left(x - \frac{a_1 + a_2}{2} \right), & a_1 < x \leq a_2, \\ 1, & x > a_2, \end{cases}$$

其中 $a_2 > a_1$, 见图 1.10(e)。

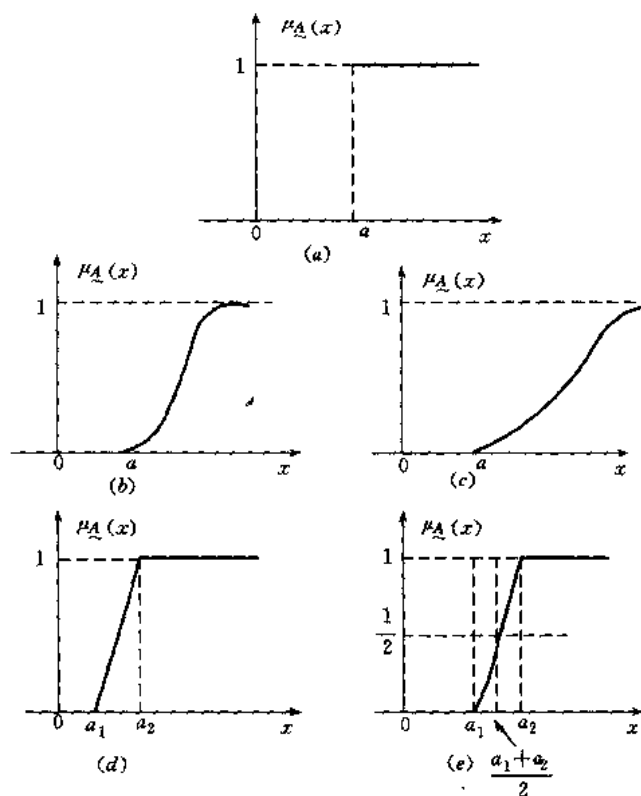


图1.10 偏大型隶属函数

第二章 模糊关系

2.1 经典关系

定义 2.1 设有两个经典集合 X 和 Y , 定义 X 和 Y 的直积为:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

直积亦称笛卡尔积, 亦称积集。

用普通语言来说就是: 在 X 中取一元素 x , 在 Y 中取一元素 y , 将它们搭配起来成为序偶 (x, y) , 所有序偶构成的一个集合就是 $X \times Y$ 。

例 2.1 $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$

则 $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

在笛卡尔坐标系中, 以 X 表示横轴, 以 Y 表示纵轴, X, Y 均是实数集 $(-\infty, +\infty)$, 则直积 $X \times Y$ 便表示坐标平面。

直积可以推广到多个集合上去。设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个经典集, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 的直积是:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

设 R 为实数集, 则: $R \times R \times R = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$ 则是通常的三维欧式空间。

笛卡尔积是两个集合元素之间无约束的搭配。若给搭配以约束, 便体现了某种特定的关系, 关系的内涵寓于搭配的约束之中, 受约束的所有序偶形成了笛卡尔积的一个子集, 这个子集便表现了所说的关系, 在经典集合中, 所谓从 X 到 Y 的一个关系, 乃定义为 $X \times Y$ 的一个子集 R 。

定义 2.2 对两个经典集合 X 和 Y , 直积 $X \times Y$ 的子集 R 称为 A 到 B 的一个二元关系。 $X \times X$ 的子集称为 X 上的一个二元关系, 二元关系简称关系。

因此有:

$$R \subseteq X \times Y, \quad R \subseteq X \times X$$

一般来讲, n 个集合的直积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 的子集称为 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 上的 n 元关系。

例 2.2 甲乒乓球队 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 乙乒乓球队 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, 安排 x_1 和 y_1, x_2 和 y_2, x_3 和 y_3 对打, 则甲队与乙队对打的关系 R 为: $R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$

若设 X, Y 是实数集, R 是 X 到 Y 的大于关系, 则

$$R = \{(x, y) | x > y, x \in X, y \in Y\}$$

这可由图 2.1 的阴影部分表示, R 是坐标平面上直线 $x = y$ 右下方的点 (不含直线上的点) 所组成的点集。

X 到 Y 的关系 R , 作为论域 $X \times Y$ 上的经典子集, 经典集合的交、并、补运算对 R 当然也适用, 经典集合的运算性质, 如 1.2 节中所列的幂等律、交换律、结合律、分配律、吸收

律、两极律、复原律、排中律对经典关系 R 也仍然适用,经典集合的特征函数表示法也适用于表示经典关系 R 。

但 R 又有其特殊性,作为一类特殊的经典集合,还有“逆”与“合成”运算。

定义 2.3 设 R 是 X 到 Y 的关系,令:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}$$

则 R^{-1} 是 Y 到 X 的关系,称 R^{-1} 为 R 的逆关系。

例 2.3 令 $A = \{3, 5\}, B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \times B$ 上的“大于”关系 R 为:

$$R = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

而 R 的逆关系,即 $B \times A$ 上的小于关系为:

$$R^{-1} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$$

关系 R 的逆关系 R^{-1} , 用特征函数表示有:

$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y) \quad (2.1)$$

式(2.1)由 R^{-1} 的定义直接得出。

合成是关系的一种常用的运算。设 U 是一群人的集合,弟兄关系 R 和父子关系 Q 是 U 上的两个关系,叔侄关系 S 也是 U 上的一个关系。这三个关系存在着这样的联系:若 x 是 z 的叔叔,即 $(x, z) \in S$, 那么至少有一个 y , 使得 x 是 y 的弟弟,即 $(x, y) \in R$, 而且 y 是 z 的父亲,即 $(y, z) \in Q$ 。反过来,这个联系也成立,这可表示为:

$$(x, z) \in S \Leftrightarrow \exists y \in U, \text{使 } (x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in Q$$

我们称叔侄关系 S 是弟兄关系 R 与父子关系 Q 的合成,记作:

$$S = R \circ Q$$

定义 2.4 给定集合 X, Y, Z , 设 R 是 $X \times Y$ 上的经典关系, Q 是 $Y \times Z$ 上的经典关系, S 是 $X \times Z$ 上的经典关系,若:

$$(x, z) \in S \Leftrightarrow \exists y \in Y, \text{使 } (x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in Q$$

则称关系 S 是关系 R 与 Q 的合成,记为:

$$S = R \circ Q$$

其中:

$$R \circ Q = \{(x, z) \mid \exists y \in Y \text{ 使 } (x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in Q\}$$

用特征函数表示则为:

$$\mu_{R \circ Q}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_Q(y, z)) \quad (2.2)$$

式(2.2)即是关系合成的先取小后取大“ $\vee - \wedge$ ”运算。由式(2.2)可见,欲确定 $X \times Z$ 上的某一序偶 (x, z) 是否属于 $R \circ Q$, 即是否有 $\mu_{R \circ Q}(x, z) = 1$, 按式(2.2)作“ $\vee - \wedge$ ”运算:

$$\begin{aligned} \mu_{R \circ Q}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_Q(y, z)) \\ &= (\mu_R(x, y_1) \wedge \mu_Q(y_1, z)) \vee (\mu_R(x, y_2) \wedge \mu_Q(y_2, z)) \end{aligned}$$

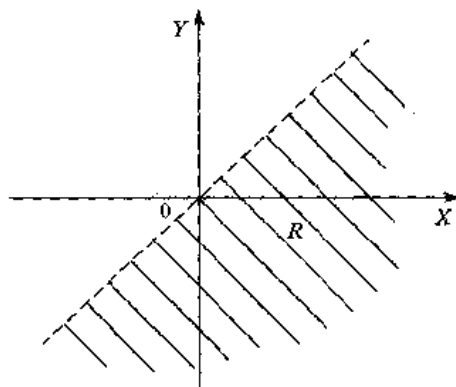


图 2.1 X 到 Y 的大于关系 R

$$\bigvee \cdots \bigvee (\mu_R(x, y_n)) \wedge \mu_Q(y_n, z))$$

(式中 $y_i \in Y, i = 1, 2, \cdots, n$)

可见 $\forall y \in Y$ 中, 若至少有一个 y 使得 $\mu_R(x, y) \wedge \mu_Q(y, z) = 1$ 即同时有 $(x, y) \in R$ 和 $(y, z) \in Q$, 则 $\mu_{R \circ Q}(x, z) = 1, (x, z) \in R \circ Q$ 。

在有限集的情况下, 经典关系 R 可以直观地用布尔矩阵表示。布尔矩阵即元素均为 1 或 0 的矩阵。

设集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, R 是 $X \times Y$ 上的关系, 则 R 可以由一个矩阵 (r_{ij}) 表示, 它是一个 $m \times n$ 矩阵, r_{ij} 由下式确定:

$$\forall (x_i, y_j) \in X \times Y, \text{ 令}$$

$$r_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in R \\ 0, & (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

例 2.2 甲队与乙队对打的关系用矩阵表示为

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

为了说明问题, 我们把 R 的行、列上分别标注了甲、乙二队的元素 x_1, x_2, x_3 和 y_1, y_2, y_3 , 这种标注不是必要的, 完全可不加。 R 的第一行第一列为 1, 说明 x_1 与 y_1 有对打关系, 第一行第二列为 0, 说明 x_1 与 y_2 无对打关系。

例 2.4 例 2.3 中 A 到 B 的大于关系 R 为:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

而 R 的逆关系 R^{-1} 为:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由上例, R 和 R^{-1} 互为转置, 这不是特例, 由逆关系的性质式(2.1)显然有:

$$R^{-1} = R^T.$$

关系的交、并、补以及合成运算均可以通过相应矩阵的交、并、补和合成运算来完成。

2.2 模糊关系

经典关系是明确的关系, 父子关系、弟兄关系、叔侄关系、大于关系、小于关系等都是明确的, 论域中的序偶要么属于要么不属于, 二者必居其一。但正如概述中所说的, 世界上还客观存在着另一类关系, 论域中的元素很难用完全肯定的属于或完全否定的不属于来回答。如“大得多”, “长得像”等, 则属于这一类关系, 它们已经不能用经典关系描述, 这类关系就是模糊关系。

定义 2.5 直积空间 $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ 上的模糊关系是 $X \times Y$ 的一个模糊子集 \tilde{R} 。 \tilde{R} 的隶属函数 $\tilde{R}(x, y)$ 表示了 X 中的元素 x 与 Y 中的元素 y 具有这种关系的程度。 X 到 X 的模糊关系称为 X 上的模糊关系。

由定义可见,模糊关系和模糊集合一样,完全由其隶属函数 $\tilde{R}(x, y)$ 来刻画。当 $\tilde{R}(x, y)$ 仅取 1 或 0 两个极端值时, \tilde{R} 退化为经典集合,模糊关系退化为经典关系。因此经典关系仅是模糊关系的特例。

$X \times Y$ 上的全体模糊关系可记为 $F(X \times Y)$ 。

若 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个集合,则所谓直积空间 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i, i=1, 2, \dots, n\}$ 上的一个 n 元模糊关系 \tilde{R} 是指 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 上的一个模糊子集。 \tilde{R} 由其隶属函数 $\tilde{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来描述,它反应了 (x_1, x_2, \dots, x_n) 具有这种关系的程度。

例如,某夫妇有一子一女,子女和父母“相像”的关系即为一种模糊关系,设为 \tilde{R} ,那么相像关系 \tilde{R} 由其隶属函数 $\tilde{R}(\text{子}, \text{父})$ 、 $\tilde{R}(\text{子}, \text{母})$ 、 $\tilde{R}(\text{女}, \text{父})$ 、 $\tilde{R}(\text{女}, \text{母})$ 来描述,它们表示了儿子与父亲、母亲,女儿与父亲、母亲相像的程度,它们均在 $[0, 1]$ 区间内取值。

例 2.5 设 \tilde{R} 是工资集 $[100, 1\ 000]$ 上“远远多于”的关系, \tilde{R} 的隶属函数可定义为:

$$\tilde{R}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq x_2 \\ \left[1 + \frac{100x_2}{(x_1 - x_2)^2}\right]^{-1}, & x_1 > x_2 \end{cases}$$

可以求出 $\tilde{R}(1\ 000, 100) = 0.99$, 说明 1 000 远远多于 100 的程度是 0.99, 而 $\tilde{R}(200, 100) = 0.5$ 。

当 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为有限集时,与经典关系类似,模糊关系 \tilde{R} 可以用矩阵表示。对于 $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$, 记 $r_{ij} = \tilde{R}(x_i, y_j)$, $0 \leq r_{ij} \leq 1$, 则 \tilde{R} 可用矩阵 $(r_{ij})_{m \times n}$ 表示。 $(r_{ij})_{m \times n}$ 是模糊矩阵。所谓模糊矩阵,就是其元素在 $[0, 1]$ 区间取值的矩阵。因此,模糊关系可用模糊矩阵表示。

例如子女和父母“相像”的关系可以由以下的模糊矩阵表示:

$$\begin{array}{c} \text{父} \quad \text{母} \\ \text{子} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \\ \text{女} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.75 \end{bmatrix} \end{array}$$

其中第一行第一列为 0.8, 即相像(子, 父) = 0.8, 子与父相像程度为 0.8, 行与列的标注也是可不加的。又如 {张三, 李四, 王五} 对 {英语, 日语, 德语, 法语} 的“掌握”关系可由下述模糊矩阵表示:

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0. & 0.7 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有限集上的模糊关系也可以用关系图直观地表示。设 $\tilde{R} \in F(X \times Y)$, X, Y 是有限集, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 一个关系图的结点是 X 和 Y 的元素, $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 到 $y_j (j=1, 2, \dots, n)$ 之间用有向直线连接, 有向连线 $x_i \rightarrow y_j$ 存在的条件是 $\tilde{R}(x_i, y_j) > 0$, 并且它的赋值就是 $\tilde{R}(x_i, y_j)$ 。

前面所举{张三,李四,王五}对{英语,日语,德语,法语}的“掌握”关系可由关系图 2.2 表示。

若 $\tilde{R} \in F(X \times X)$, 即 \tilde{R} 为有限论域 X 上的二元模糊关系, 关系图可简化, 图 2.3 表示论域 {1,5,7} 上“大得多”的模糊关系。

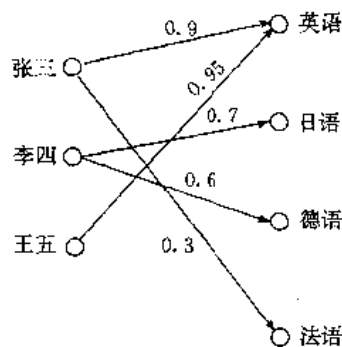


图 2.2 “掌握”关系

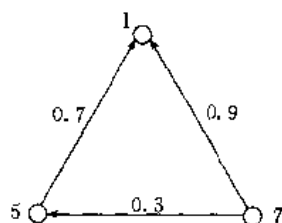


图 2.3 {1,5,7} 上“大得多”关系

2.3 模糊关系的运算

由于模糊关系是一类特殊的模糊集, 它同模糊集合一样同样有交、并、补等运算。

性质 2.1 设 $\tilde{R}, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in F(X, Y), \forall t \in T$ 时 $R_t \in F(X \times Y)$, 则有:

$$(1) \tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2 \Leftrightarrow \forall (x, y) \in X \times Y, \tilde{R}_1(x, y) \leq \tilde{R}_2(x, y)$$

$$(2) \tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 \Leftrightarrow \forall (x, y) \in X, Y, \tilde{R}_1(x, y) = \tilde{R}_2(x, y)$$

$$(3) (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)(x, y) = \tilde{R}_1(x, y) \vee \tilde{R}_2(x, y)$$

$$(4) (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2)(x, y) = \tilde{R}_1(x, y) \wedge \tilde{R}_2(x, y)$$

$$(5) (\bigcup_{t \in T} \tilde{R}_t)(x, y) = \bigvee_{t \in T} \tilde{R}_t(x, y)$$

$$(6) (\bigcap_{t \in T} \tilde{R}_t)(x, y) = \bigwedge_{t \in T} \tilde{R}_t(x, y)$$

$$(7) \tilde{R}(x, y) = 1 - \tilde{R}(x, y)$$

模糊关系这些运算满足 1.5 节给出的模糊集合运算的性质 1.3, 包括幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、两极律、复原律和摩根律, 此处不再一一列出。

推广经典关系的逆关系和合成运算到模糊关系的情况, 可以定义模糊关系的逆关系及合成运算。

定义 2.6 设 $\tilde{R} \in F(X \times Y)$, 定义 $\tilde{R}^{-1} \in F(Y \times X)$ 的隶属函数为:

$$\tilde{R}^{-1}(y, x) = \tilde{R}(x, y), (\forall (y, x) \in Y \times X) \quad (2.3)$$

称 Y 到 X 的模糊关系 \tilde{R}^{-1} 为 \tilde{R} 的逆关系。

与经典关系类似, 当 \tilde{R} 和 \tilde{R}^{-1} 用模糊矩阵表示时, 由定义, 显然它们的模糊矩阵互为转置。

定义 2.7 设 $\tilde{R} \in F(X, Y), \tilde{Q} \in F(Y, Z)$, 定义 $\tilde{R} \circ \tilde{Q} \in F(X, Z)$ 的隶属函数为:

$$\begin{aligned} \tilde{R} \circ \tilde{Q}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\tilde{R}(x, y) \wedge \tilde{Q}(y, z)) \\ &\quad \forall (x, z) \in X \times Z \end{aligned} \quad (2.4)$$

称 X 到 Z 的模糊关系 $\tilde{R} \circ \tilde{Q}$ 为 \tilde{R} 与 \tilde{Q} 的合成关系。

记 $\tilde{R} \circ \tilde{R}$ 为 \tilde{R}^2 , $\tilde{R}^2 \circ \tilde{R}$ 为 \tilde{R}^3 , \dots , $\tilde{R}^{n-1} \circ \tilde{R}$ 为 \tilde{R}^n 。

若 X, Y, Z 均为有限集, 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ 则 $\tilde{R} \in F(X \times Y)$ 可表示为一个 $m \times n$ 模糊矩阵 $(r_{ik})_{m \times n}$, $\tilde{Q} \in F(Y, Z)$ 可表示为一个 $n \times l$ 的模糊矩阵 $(q_{kj})_{n \times l}$, $\tilde{R} \circ \tilde{Q} \in F(X, Z)$ 是 X 到 Z 的模糊关系, 它可表示为一个 $m \times l$ 的模糊矩阵, 设 $S = \tilde{R} \circ \tilde{Q} = (s_{ij})_{m \times l}$, 由式(2.4)可得:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \bigvee_{k=1}^n (r_{ik} \wedge q_{kj}) \\ i &= 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (2.5)$$

式(2.5)表示模糊矩阵的合成运算。模糊矩阵的合成完全是模糊关系合成的一种矩阵形式的表达。合成矩阵的每个元素也是“ $\vee - \wedge$ ”运算的结果, 类似于普通矩阵的乘法运算, 普通矩阵是先乘后加运算, 而模糊矩阵是先取小后取大运算。

例 2.6 求 $S = \tilde{R} \circ \tilde{Q}$, 其中

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

解:

$$S = \tilde{R} \circ \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

其中:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \bigvee_{k=1}^3 (r_{1k} \wedge q_{k1}) \\ &= (r_{11} \wedge q_{11}) \vee (r_{12} \wedge q_{21}) \vee (r_{13} \wedge q_{31}) \\ &= (0.3 \wedge 0.1) \vee (0.7 \wedge 0.9) \vee (0.2 \wedge 0.6) \\ &= 0.1 \vee 0.7 \vee 0.2 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

余类推。

例 2.7 某家庭子女与父母外貌“相像”关系 \tilde{R} 及父母与祖父母、外祖父母“相像”的关系 \tilde{Q} 分别是:

$$\begin{array}{cc} \text{父} & \text{母} \\ \text{子} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \\ \text{女} & \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \text{祖父} & \text{祖母} & \text{外祖父} & \text{外祖母} \\ \text{父} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \\ \text{母} & \end{array}$$

那么子女与祖父母、外祖父母“相像”的关系为 $\tilde{R} \circ \tilde{Q}$, 即:

$$R \circ Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{祖父} & \text{祖母} & \text{外祖父} & \text{外祖母} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{子} \\ \text{女} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

模糊集合的 λ 水平截集的概念推广到模糊关系中去,便有 λ 截关系及相应的 λ 截矩阵的定义。

定义 2.8 设 $R \in F(X \times Y), \forall \lambda \in [0, 1], R$ 的 λ 水平截集 R_λ 是 X 到 Y 之间的一个经典关系,称 λ 截关系,有:

$$R_\lambda = \{(x, y) \in X \times Y | R(x, y) \geq \lambda\}$$

R 的 λ 强截集 R_λ 称为 λ 强截关系,有:

$$R_\lambda = \{(x, y) \in X \times Y | R(x, y) > \lambda\}$$

在有限集情况下, R 对应模糊矩阵 (r_{ij}) , R_λ 也对应了 λ 截矩阵。 R 的 λ 截矩阵是指,对于 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 称 $R_\lambda = (\lambda r_{ij})$ 为 R 的 λ 截矩阵, λr_{ij} 满足:

$$\lambda r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } r_{ij} \geq \lambda \\ 0, & \text{当 } r_{ij} < \lambda \end{cases}$$

相应地, R 的 λ 强截矩阵 $R_\lambda = (\lambda r_{ij})$ 有:

$$\lambda r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } r_{ij} > \lambda \\ 0, & \text{当 } r_{ij} \leq \lambda \end{cases}$$

λ 截矩阵和强截矩阵的元素仅为 1 或 0, 是普通矩阵。

例 2.8 图 2.2 关系图表示的对外语“掌握”关系, 取 $\lambda = 0.9$, λ 截矩阵为:

$$\text{掌握}_{0.9} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见在 0.9 这一置信水平上, 张三、王五掌握了英语, 如果 0.9 这一水平是出国考试通过的界限, 那么李四虽然学了两门外语, 却不能出国, 王五只学了一门却能出国。

逆关系有如下性质:

性质 2.2 设 $R, R_1, R_2 \in F(X, Y), R_t \in F(X, Y), t \in T$, 则:

$$(1) \text{ 若 } R_1 \subseteq R_2 \text{ 则 } R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$$

$$(2) (R^{-1})^{-1} = R$$

$$(3) (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$$

$$(4) (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$$

$$(5) (\bigcup_{t \in T} R_t)^{-1} = \bigcup_{t \in T} R_t^{-1}$$

$$(6) (\bigcap_{t \in T} R_t)^{-1} = \bigcap_{t \in T} R_t^{-1}$$

证明: (1) 因为 $R_1 \subseteq R_2$, 故 $\forall (x, y) \in X \times Y$ 有 $R_1(x, y) \leq R_2(x, y)$

$$\text{又: } R_1^{-1}(y, x) = R_1(x, y), R_2^{-1}(y, x) = R_2(x, y)$$

$$\text{故: } R_1^{-1}(y, x) \leq R_2^{-1}(y, x)$$

即:

$$\tilde{R}_1^{-1} \subseteq \tilde{R}_2^{-1}$$

(2) $(\tilde{R}^{-1})^{-1}$ 是 X 到 Y 的模糊关系, $\forall (x, y) \in X \times Y$ 有 $(\tilde{R}^{-1})^{-1}(x, y) = \tilde{R}^{-1}(y, x) = \tilde{R}(x, y)$

故:

$$(\tilde{R}^{-1})^{-1} = \tilde{R}$$

在有限集的情况下, $(\tilde{R}^{-1})^{-1}$ 的模糊矩阵是 \tilde{R} 的转置再转置, 即为 \tilde{R} 。模糊矩阵相等, 模糊关系即相等。

(3) $(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)^{-1}$ 是 Y 到 X 的模糊关系, 因此 $\forall (y, x) \in Y \times X$ 有:

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)^{-1}(y, x) &= (\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)(x, y) \\ &= \tilde{R}_1(x, y) \vee \tilde{R}_2(x, y) = \tilde{R}_1^{-1}(y, x) \vee \tilde{R}_2^{-1}(y, x) \end{aligned}$$

即:

$$(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)^{-1} = \tilde{R}_1^{-1} \cup \tilde{R}_2^{-1}$$

(4) 证明类似于(3), 留给读者自己证明。

(5) $(\bigcup_{i \in T} \tilde{R}_i)^{-1}$ 是 Y 到 X 的模糊关系, 因此 $\forall (y, x) \in Y \times X$ 有:

$$\begin{aligned} (\bigcup_{i \in T} \tilde{R}_i)^{-1}(y, x) &= (\bigcup_{i \in T} \tilde{R}_i)(x, y) \\ &= \bigvee_{i \in T} \tilde{R}_i(x, y) = \bigvee_{i \in T} \tilde{R}_i^{-1}(y, x) = (\bigcup_{i \in T} \tilde{R}_i^{-1})(y, x) \end{aligned}$$

故:

$$(\bigcup_{i \in T} \tilde{R}_i)^{-1} = \bigcup_{i \in T} \tilde{R}_i^{-1}$$

(6) 证明类似(5), 读者可自己证。

合成关系有如下性质:

性质 2.3 设 $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R} \in F(X \times Y), \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q} \in F(Y \times Z), \tilde{S} \in F(Z \times W)$, 则有:

$$(1) (\tilde{R} \circ \tilde{Q})^{-1} = \tilde{Q}^{-1} \circ \tilde{R}^{-1}$$

$$(2) \text{ 若 } \tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2 \text{ 则 } \tilde{R}_1 \circ \tilde{Q} \subseteq \tilde{R}_2 \circ \tilde{Q}$$

$$\text{若 } \tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{Q}_2 \text{ 则 } \tilde{R} \circ \tilde{Q}_1 \subseteq \tilde{R} \circ \tilde{Q}_2$$

$$(3) (\tilde{R} \circ \tilde{Q}) \circ \tilde{S} = \tilde{R} \circ (\tilde{Q} \circ \tilde{S}) \quad (\text{结合律})$$

$$(4) \tilde{R} \circ (\tilde{Q}_1 \cup \tilde{Q}_2) = (\tilde{R} \circ \tilde{Q}_1) \cup (\tilde{R} \circ \tilde{Q}_2)$$

$$(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2) \circ \tilde{Q} = (\tilde{R}_1 \circ \tilde{Q}) \cup (\tilde{R}_2 \circ \tilde{Q}) \quad (\text{分配律})$$

$$(5) \tilde{R} \circ (\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2) \subseteq (\tilde{R} \circ \tilde{Q}_1) \cap (\tilde{R} \circ \tilde{Q}_2)$$

$$(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2) \circ \tilde{Q} \subseteq (\tilde{R}_1 \circ \tilde{Q}) \cap (\tilde{R}_2 \circ \tilde{Q}) \quad (\text{弱分配律})$$

证明: (1) $(\tilde{R} \circ \tilde{Q})^{-1}$ 是 Z 到 X 的模糊关系, 对于 $\forall (z, x) \in Z \times X$, 有:

$$(\tilde{R} \circ \tilde{Q})^{-1}(z, x) = (\tilde{R} \circ \tilde{Q})(x, z)$$

$$= \bigvee_{y \in Y} (\tilde{R}(x, y) \wedge \tilde{Q}(y, z))$$

$$= \bigvee_{y \in Y} (\tilde{Q}^{-1}(z, y) \wedge \tilde{R}^{-1}(y, x))$$

$$= (\tilde{Q}^{-1} \circ \tilde{R}^{-1})(z, x)$$

故:

$$(\tilde{R} \circ \tilde{Q})^{-1} = \tilde{Q}^{-1} \circ \tilde{R}^{-1}$$

(2) 因为 $\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2$, 故 $\tilde{R}_1(x, y) \leq \tilde{R}_2(x, y)$, 所以:

$$\bigvee_{y \in Y} (R_1(x, y) \wedge Q(y, z)) \leq \bigvee_{y \in Y} (R_2(x, y) \wedge Q(y, z))$$

即:

$$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$$

(2) 的第二个式子证明类似。

(3) 只要验证等式两端隶属函数相等即可, 两端均为 X 到 W 的模糊关系, $\forall (x, w) \in X \times W$ 有:

$$\begin{aligned} & ((R \circ Q) \circ S)(x, w) \\ &= \bigvee_{z \in Z} (\bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge S(z, w)) \\ &= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge S(z, w) \end{aligned}$$

这一步推导是根据 1.5 节模糊集合的运算性质分配律 $A \cap (\bigcup_{i \in T} A_i) = \bigcup_{i \in T} (A \cap A_i)$ 而得。而:

$$\begin{aligned} & (R \circ (Q \circ S))(x, w) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge (\bigvee_{z \in Z} (Q(y, z) \wedge S(z, w)))) \\ &= \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{z \in Z} (R(x, y) \wedge Q(y, z) \wedge S(z, w)) \\ &= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge Q(y, z) \wedge S(z, w)) \\ &= ((R \circ Q) \circ S)(x, w) \end{aligned}$$

故:

$$(R \circ Q) \circ S = R \circ (Q \circ S)$$

(4) 对 $\forall (x, z) \in X \times Z$ 有

$$\begin{aligned} & (R \circ (Q_1 \cup Q_2))(x, z) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge (Q_1(y, z) \vee Q_2(y, z))) \\ &= \bigvee_{y \in Y} ((R(x, y) \wedge Q_1(y, z)) \vee (R(x, y) \wedge Q_2(y, z))) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge Q_1(y, z)) \vee (\bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge Q_2(y, z))) \\ &= (R \circ Q_1)(x, z) \vee (R \circ Q_2)(x, z) \\ &= ((R \circ Q_1) \cup (R \circ Q_2))(x, z) \end{aligned}$$

故:

$$R \circ (Q_1 \cup Q_2) = (R \circ Q_1) \cup (R \circ Q_2)$$

在上述推导中, 我们利用了下述等式:

$$\bigvee_{j \in J} (a_j \vee b_j) = (\bigvee_{j \in J} a_j) \vee (\bigvee_{j \in J} b_j) \quad (2.6)$$

式中 $a_j \in [0, 1], b_j \in [0, 1], j \in J$ 。把等式两边展开, 即可证明等式成立。

(4) 的第二个式子类似可证, 从略。

(5) 只证第一个式子: $\forall (x, z) \in X \times Z$, 有:

$$\begin{aligned}
& (\underset{\sim}{R} \circ (\underset{\sim}{Q_1} \cap \underset{\sim}{Q_2}))(x, z) \\
&= \bigvee_{y \in Y} (\underset{\sim}{R}(x, y) \wedge \underset{\sim}{Q_1}(y, z) \wedge \underset{\sim}{Q_2}(y, z)) \\
&= \bigvee_{y \in Y} ((\underset{\sim}{R}(x, y) \wedge \underset{\sim}{Q_1}(y, z)) \wedge (\underset{\sim}{R}(x, y) \wedge \underset{\sim}{Q_2}(y, z))) \\
&\leq (\bigvee_{y \in Y} (\underset{\sim}{R}(x, y) \wedge \underset{\sim}{Q_1}(y, z))) \wedge (\bigvee_{y \in Y} (\underset{\sim}{R}(x, y) \wedge \underset{\sim}{Q_2}(y, z))) \\
&= (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q_1})(x, z) \wedge (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q_2})(x, z) \\
&= ((\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q_1}) \cap (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q_2}))(x, z)
\end{aligned}$$

故： $\underset{\sim}{R} \circ (\underset{\sim}{Q_1} \cap \underset{\sim}{Q_2}) \subseteq (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q_1}) \cap (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{Q_2})$

推导中“ \leq ”一步，利用了如下的等式：

$$\bigvee_{j \in J} (a_j \wedge b_j) \leq (\bigvee_{j \in J} a_j) \wedge (\bigvee_{j \in J} b_j) \quad (2.7)$$

式中 $a_j, b_j \in [0, 1], j \in J$ 。这个式子证明如下：

因为 $(a_j \wedge b_j) \leq a_j$ ，其中 $j \in J$ ，故：

$$\bigvee_{j \in J} (a_j \wedge b_j) \leq \bigvee_{j \in J} a_j$$

同理：

$$\bigvee_{j \in J} (a_j \wedge b_j) \leq \bigvee_{j \in J} b_j$$

所以：

$$\bigvee_{j \in J} (a_j \wedge b_j) \leq (\bigvee_{j \in J} a_j) \wedge (\bigvee_{j \in J} b_j)$$

当 $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{Q}$ 为 X 上的模糊关系，即 $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{Q} \in F(X \times X)$ ，由合成关系的性质可以推出以下性质：

性质 2.4

$$(1) \underset{\sim}{R}^{m+n} = \underset{\sim}{R}^m \circ \underset{\sim}{R}^n$$

$$(2) (\underset{\sim}{R}^n)^{-1} = (\underset{\sim}{R}^{-1})^n$$

$$(3) \text{若 } \underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{Q} \text{ 则 } \underset{\sim}{R}^n \subseteq \underset{\sim}{Q}^n \quad (n \text{ 为正整数})$$

证明：

$$\begin{aligned}
(1) \underset{\sim}{R}^{m+n} &= \underset{\sim}{R}^{m+n-1} \circ \underset{\sim}{R} \\
&= (\underset{\sim}{R}^{m+n-2} \circ \underset{\sim}{R}) \circ \underset{\sim}{R} \\
&= \underset{\sim}{R}^{m+n-2} \circ (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}) \\
&= \underset{\sim}{R}^{m+n-2} \circ \underset{\sim}{R}^2 \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

$$= \underset{\sim}{R}^m \circ \underset{\sim}{R}^n$$

$$\begin{aligned}
(2) (\underset{\sim}{R}^n)^{-1} &= (\underset{\sim}{R}^{n-1} \circ \underset{\sim}{R})^{-1} \\
&= \underset{\sim}{R}^{-1} \circ (\underset{\sim}{R}^{n-1})^{-1} \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underset{\sim}{R}^{-1} \circ \underset{\sim}{R}^{-1} \circ \dots \circ \underset{\sim}{R}^{-1} \quad (\text{共 } n \text{ 个}) \\
&= (\underset{\sim}{R}^{-1})^n
\end{aligned}$$

$$(3) \text{因为 } \underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{Q} \in F(X, X) \text{ 且 } \underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{Q}, \text{ 故:}$$

$$\begin{aligned}
\text{又:} \quad & \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R} \\
& \underset{\sim}{R}^2 \subseteq \underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R} \\
& \underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{Q} \\
& \underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{Q}^2 \\
\text{故:} \quad & \underset{\sim}{R}^2 \subseteq \underset{\sim}{Q}^2 \\
& \dots\dots \\
& \underset{\sim}{R}^n \subseteq \underset{\sim}{Q}^n
\end{aligned}$$

2.4 模糊等价关系

2.4.1 经典等价关系

定义 2.9 若 R 是 X 上的经典关系, 定义:

- (1) 称 R 是**自反的** $\Leftrightarrow \forall x \in X, (x, x) \in R$;
- (2) 称 R 是**对称的** \Leftrightarrow 若 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R$;
- (3) 称 R 是**传递的** \Leftrightarrow 若 $(x, y) \in R, (y, z) \in R$ 则 $(x, z) \in R$;
- (4) 称 R 是 X 上的一个**等价关系** $\Leftrightarrow R$ 是 X 上的一个自反、对称且传递的关系。

一个自反关系, 任何元素 x 自身与自身具备这种关系, 对应的矩阵对角线元素均为 1, 一个对称关系对应的矩阵是对称矩阵。

例如在一群校友中, “同年毕业”就是一等价关系, 它具有自反性、对称性和传递性。而“早毕业”则具有传递性。

定义 2.10 若 R 是 X 上的一个等价关系, 对 $\forall x \in X$, 称子集:

$$R[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$$

为以 x 为代表的模 R 等价类, 简称**等价类**。称集族:

$$X/R = \{R[x] \mid x \in X, x \text{ 不同时 } R[x] \text{ 不等}\}$$

为 X 的模 R 的**商集**。

例 2.9 令 X 代表整数集, 并令:

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid (x - y) \text{ 可被 } 3 \text{ 整除}\}$$

则 R 具有自反性、对称性和传递性, 为等价关系, 且 $\forall x \in X$, 有:

$$R[0] = R[3] = R[3x] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$R[1] = R[3x+1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$R[2] = R[3x+2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

可见, X (整数集) 的模 R 等价类有 3 个子集: 一个是所有 3 的倍数集, 一个是 3 的整倍数加 1 的数组成的集合, 一个是 3 的整倍数加 2 的数组成的集合。因此, X 的模 R 商集只有三个元素:

$$X/R = \{R[0], R[1], R[2]\}$$

也就是说集族 X/R 由三个子集组成。

例 2.10 设有限整数集 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(x, y) \in X \times X \mid (x + y) \text{ 可被 } 2 \text{ 整}$

除},显然 R 具有自反性、对称性和传递性,是等价关系。用矩阵表示, R 为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X 的模 R 等价类:

$$R[1]=R[3]=R[5]=\{1,3,5\}$$

$$R[2]=R[4]=R[6]=\{2,4,6\}$$

X 的模 R 商集为:

$$X/R=\{R[1],R[2]\}$$

因为 R 是等价的,由 R 的矩阵可见,对角线元素均为 1,而且为对称矩阵。

商集与“划分”概念密切相关。

集合 X 的一个划分是一个集族 $\{X_t|t \in T\}$,它满足以下几个条件:

$$(1) \forall X_t \in \{X_t|t \in T\}, X_t \neq \emptyset$$

$$(2) \forall t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2, \text{ 则 } X_{t_1} \cap X_{t_2} = \emptyset$$

$$(3) \bigcup_{t \in T} X_t = X$$

可见,集 X 的划分就相当于把 X 的元素分类,条件(1) 要求每类都不空,条件(2) 要任意两个不同类不相交,没有共同元素,界限清楚,条件(3) 则表示所有的类完整地构成集合 X , X 的每一个元素必须属于其中一类,而且只能属于一类(条件(2))。

若 R 是集 X 上的等价关系,则可以证明 X/R 是 X 的一个划分,称这个划分为等价关系 R 诱导的划分,划分的每一类都满足等价关系 R 。

例 2.9 中 $R[0], R[1], R[2]$ 就是由等价关系 $R=\{(x,y) \in X \times X | (x-y) \text{ 可被 } 3 \text{ 整除}\}$ 诱导出的整数集 X 的一个划分,这个划分把 X 分为三类,即三个子集 $R[0], R[1], R[2]$, 它们均不为空,互不相交,而且 $R[0] \cup R[1] \cup R[2] = X, R[0], R[1], R[2]$ 三个子集均满足关系 R 。

例 2.10 中有限集 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ 则被划分为两类 $\{1,3,5\}$ 和 $\{2,4,6\}$,它是由 $x+y$ 被 2 整数的关系诱导而得,因而每类均符合这一关系,且这一划分满足“划分”的三个条件。

2.4.2 模糊等价关系

定义 2.11 设 R 是 X 上的模糊关系,即 $R \in F(X \times X)$,

$$(1) \text{ 称 } R \text{ 是自反的} \Leftrightarrow \forall x \in X, R(x,x)=1;$$

$$(2) \text{ 称 } R \text{ 是对称的} \Leftrightarrow \forall x,y \in X, R(x,y)=R(y,x);$$

$$(3) \text{ 称 } R \text{ 是传递的} \Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1], \forall x,y,z \in X, \text{ 若 } R(x,y) \geq \lambda, R(y,z) \geq \lambda \text{ 则 } R(x,z) \geq \lambda;$$

(4) 若 R 是 X 上自反、对称关系, 则称 R 是 X 上模糊相似关系, 简称相似关系。

(5) 若 \tilde{R} 是 X 上的自反、对称、传递的模糊关系, 则称 \tilde{R} 为 X 上模糊等价关系, 简称等价关系。

性质 2.5 自反关系有如下性质:

(1) R 是自反的, 则 $R^n \subseteq R^{n+1}, (n \geq 1)$

(2) \tilde{R} 是自反的, 则 \tilde{R}^n 也是自反的, $n \geq 1$

证明: (1) 用归纳法证明:

$\forall (x, y) \in X \times X$ 有:

$$\begin{aligned} R^2(x, y) &= \bigvee_{z \in X} (R(x, z) \wedge R(z, y)) \\ &\geq (R(x, x) \wedge R(x, y)) \quad (\text{仅为上面取大式中的一项, } z=x \in X) \\ &= 1 \wedge R(x, y) \\ &= R(x, y) \end{aligned}$$

故:

$$R \subseteq R^2$$

设 $R^{n-1} \subseteq R^n$, 由 2.3 节模糊关系合成运算的性质(2) 有:

$$\begin{aligned} R^{n-1} \circ R &\subseteq R^n \circ R \\ \tilde{R}^{n-1} \circ \tilde{R} &\subseteq \tilde{R}^{n+1} \end{aligned}$$

即:

故当 $n \geq 1$ 时有:

$$\tilde{R}^n \subseteq \tilde{R}^{n+1}$$

(2) 由(1) 知:

$$\begin{aligned} R^{n-1} &\subseteq R^n \\ R^{n-2} &\subseteq R^{n-1} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &\subseteq R^2 \\ \tilde{R} &\subseteq \tilde{R}^n \end{aligned}$$

故:

那么 $\forall (x, x) \in X \times X$, 有:

$$R^n(x, x) \geq R(x, x)$$

因为 $R(x, x) = 1$, 故 $R^n(x, x) = 1$. 因此 R^n 是自反的。

性质 2.6 对称关系有如下性质:

设 $R, R_1, R_2 \in F(X \times X)$, 则有:

(1) R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$,

(2) R_1, R_2 都是对称的, 则: $R_1 \circ R_2$ 对称 $\Leftrightarrow R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ (R_1 和 R_2 可交换),

(3) R 是对称的, 则 R^n 是对称的 ($n \geq 1$),

(4) $R \circ R^{-1}$ 是 X 上的对称关系。

证明: (1) 由对称关系和逆关系的定义可得。

(2) 先证 \Rightarrow 。

因为 $(R_1 \circ R_2)$ 对称, 且 R_1, R_2 均对称, 有:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = (\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2)^{-1} \quad (\text{性质(1)})$$

$$\begin{aligned}
&= \underset{\sim}{R_2}^{-1} \circ \underset{\sim}{R_1}^{-1} \quad (\text{合成关系的性质 2.3(1)}) \\
&= \underset{\sim}{R_2} \circ \underset{\sim}{R_1}
\end{aligned}$$

再证 \Leftarrow 。

因为 $\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2} = \underset{\sim}{R_2} \circ \underset{\sim}{R_1}$, 故:

$$\begin{aligned}
(\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2})^{-1} &= \underset{\sim}{R_2}^{-1} \circ \underset{\sim}{R_1}^{-1} \\
&= \underset{\sim}{R_2} \circ \underset{\sim}{R_1} \\
&= \underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}
\end{aligned}$$

由(1)知 $\underset{\sim}{R_1} \circ \underset{\sim}{R_2}$ 是对称的。

$$\begin{aligned}
(3) \quad (\underset{\sim}{R^n})^{-1} &= (\underset{\sim}{R^{-1}})^n \quad (\text{合成关系的性质 2.4(2)}) \\
&= \underset{\sim}{R^n} \quad (\text{性质(1)})
\end{aligned}$$

由性质(1), $\underset{\sim}{R^n}$ 对称。

$$\begin{aligned}
(4) \quad (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R^{-1}})^{-1} &= (\underset{\sim}{R^{-1}})^{-1} \circ \underset{\sim}{R^{-1}} \quad (\text{合成关系的性质 2.3(1)}) \\
&= \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R^{-1}}
\end{aligned}$$

由性质(1), $\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R^{-1}}$ 对称。

性质 2.7 传递关系有如下性质:

设 $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{R_1}, \underset{\sim}{R_2} \in F(X, X)$, 则:

- (1) $\underset{\sim}{R}$ 是传递的 $\Leftrightarrow \underset{\sim}{R}^2 \subseteq \underset{\sim}{R}$,
- (2) $\underset{\sim}{R}$ 是传递的, 则 $\underset{\sim}{R}^n$ 是传递的 ($n \geq 1$),
- (3) $\underset{\sim}{R_1}, \underset{\sim}{R_2}$ 是传递的, 则 $\underset{\sim}{R_1} \cap \underset{\sim}{R_2}$ 是传递的。

证明: (1) 先证 \Rightarrow 。

设 $x, y \in X, \forall z \in X$, 令:

$$\lambda_z = \underset{\sim}{R}(x, z) \wedge \underset{\sim}{R}(z, y)$$

则有: $\underset{\sim}{R}(x, z) \geq \lambda_z, \underset{\sim}{R}(z, y) \geq \lambda_z$ 。

因为 $\underset{\sim}{R}$ 是传递的, 故 $\forall z \in X$ 有 $\underset{\sim}{R}(x, y) \geq \lambda_z$, 于是有:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{R}(x, y) &\geq \bigvee_{z \in X} \lambda_z = \bigvee_{z \in X} [\underset{\sim}{R}(x, z) \wedge \underset{\sim}{R}(z, y)] \\
&= \underset{\sim}{R}^2(x, y)
\end{aligned}$$

由于 x, y 是任意的 X 中的元素, 那么:

$$\underset{\sim}{R}^2 \subseteq \underset{\sim}{R}$$

再证 \Leftarrow 。

令 $\underset{\sim}{R}(x, y) \geq \lambda, \underset{\sim}{R}(y, z) \geq \lambda, \lambda \in [0, 1], x, y, z \in X$, 因为 $\underset{\sim}{R}^2 \subseteq \underset{\sim}{R}$, 故:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{R}(x, z) &\geq \underset{\sim}{R}^2(x, z) = \bigvee_{t \in X} [\underset{\sim}{R}(x, t) \wedge \underset{\sim}{R}(t, z)] \\
&\geq \underset{\sim}{R}(x, y) \wedge \underset{\sim}{R}(y, z) \\
&\geq \lambda
\end{aligned}$$

可见 $\underset{\sim}{R}$ 是传递的。

(2) 因为 $\underset{\sim}{R}$ 是传递的, 故 $\underset{\sim}{R}^2 \subseteq \underset{\sim}{R}$, 由合成运算的性质 2.4(3), 有:

$$(\underset{\sim}{R}^2)^n \subseteq \underset{\sim}{R}^n$$

又: $(R^2)^n = (R^n)^2$

故: $(R^n)^2 \subseteq R^n$

由性质(1), R^n 是传递的。

(3) 因为 R_1, R_2 传递, 故有

$$R_1^2 \subseteq R_1, R_2^2 \subseteq R_2.$$

$$(R_1 \cap R_2)^2 = (R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2)$$

$$\subseteq ((R_1 \cap R_2) \circ R_1) \cap ((R_1 \cap R_2) \circ R_2) \quad (\text{合成运算性质 2.3(5)})$$

$$\subseteq (R_1 \circ R_1) \cap (R_2 \circ R_1) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_2) \quad (\text{合成运算性质 2.3(5)})$$

$$\subseteq (R_1 \circ R_1) \cap (R_2 \cap R_2)$$

$$= R_1^2 \cap R_2^2$$

$$\subseteq R_1 \cap R_2$$

由性质(1), $R_1 \cap R_2$ 是传递的。

例 2.11 给定有限论域上的模糊关系 R 如下:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 1 & 1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

不难看出, \tilde{R}^2 的每个元素均小于等于 \tilde{R} 中对应行列上的元素, 因而 $\tilde{R}^2 \subseteq \tilde{R}$, 由性质(1), \tilde{R} 是传递的。

定理 2.1 设 $R \in F(X \times X)$, 则

\tilde{R} 是模糊等价关系 $\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0, 1], R_\lambda$ 是经典等价关系。

且当 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 时, $\forall x \in X$, 等价类 $R_{\lambda_1}[x] \subseteq R_{\lambda_2}[x]$ 。这里 R_λ 为 \tilde{R} 的 λ 截关系。

证明: 先证 \Rightarrow , 即若 \tilde{R} 是模糊等价关系, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 证明 R_λ 是自反、对称、传递的。

自反性: $\forall x \in X$, 因 \tilde{R} 自反, 故 $\tilde{R}(x, x) = 1, \tilde{R}(x, x) \geq \lambda$, 从而 $(x, x) \in R_\lambda$, 故 R_λ 自反。

对称性: 因为 \tilde{R} 对称, $\forall (x, y) \in X \times X$, 有 $\tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x)$, 若 $(x, y) \in R_\lambda$, 即 $\tilde{R}(x, y) \geq \lambda$, 那么 $\tilde{R}(y, x) \geq \lambda$, 故 $(y, x) \in R_\lambda$, 因此 R_λ 对称。

传递性: $\forall x, y, z \in X$, 若 $(x, y) \in R_\lambda$ 且 $(y, z) \in R_\lambda$, 则 $\tilde{R}(x, y) \geq \lambda$ 且 $\tilde{R}(y, z) \geq \lambda$ 。由于 \tilde{R} 传递, 因而 $\tilde{R}(x, z) \geq \lambda$, 即 $(x, z) \in R_\lambda$ 。故 R_λ 是传递的。

由于 R_λ 自反、对称、传递, 故 R_λ 是经典的等价关系。

再证 \Leftarrow , 即 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 若 R_λ 是经典的等价关系, 验证 \tilde{R} 是自反、对称和传递的模糊关系。

自反性: $\forall x \in X$, 因 R_λ 自反, 故 $(x, x) \in R_\lambda$, 即 $\tilde{R}(x, x) = 1$, 故 \tilde{R} 是自反的。

对称性: $\forall x, y \in X$, 令 $R(x, y) = \lambda$, 则 $(x, y) \in R_\lambda$, 因为 R_λ 对称, $(y, x) \in R_\lambda$, 即有 $R(y, x) \geq \lambda$, 即 $\tilde{R}(y, x) \geq \tilde{R}(x, y)$ 。

同理又有: $\tilde{R}(x, y) \geq \tilde{R}(y, x)$ 。

综上两式 $\tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x)$, 即 \tilde{R} 是对称的。

传递性: $\forall x, y, z \in X, \lambda \in [0, 1]$, 若 $R(x, y) \geq \lambda$ 且 $R(y, z) \geq \lambda$, 则 $(x, y) \in R_\lambda$ 且 $(y, z) \in R_\lambda$ 。因为 R_λ 是传递的, 故 $(x, z) \in R_\lambda$, 因此 $R(x, z) \geq \lambda$ 。由传递性的定义可知 \tilde{R} 是传递的。

又 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 \geq \lambda_2, \forall y \in R_{\lambda_1}[x]$, 由等价类的定义有 $(x, y) \in R_{\lambda_1}$, 即 $\tilde{R}(x, y) \geq \lambda_1$, 于是 $\tilde{R}(x, y) \geq \lambda_2$, 故 $(x, y) \in R_{\lambda_2}$, $y \in R_{\lambda_2}[x]$ 。

因此属于 $R_{\lambda_1}[x]$ 的元素必然属于 $R_{\lambda_2}[x]$, 所以有: $R_{\lambda_1}[x] \subseteq R_{\lambda_2}[x]$ 。证毕。

本节前面曾述及, X 上的一个经典等价关系可以诱导出 X 的一个划分, 从而得到一个基于这个关系的 X 的分类结果。定理 2.1 又证明, X 上的模糊等价关系 \tilde{R} 对应一个系列的经典等价关系: $\{R_\lambda | \lambda \in [0, 1]\}$, 因而可以诱导出 X 的一系列的划分。在这一系列的划分中, 由于 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 时, $R_{\lambda_1}[x] \subseteq R_{\lambda_2}[x]$, 即 R_{λ_1} 诱导的分类结果中的每一类, 是 R_{λ_2} 诱导出的分类结果中某一类的子类, 也就是说 R_{λ_1} 给出的分类结果比 R_{λ_2} 给出的分类结果更细, 类别更多。若 λ 由 1 开始, 随着 λ 的下降, R_λ 给出的分类越来越粗, 类别越来越少, λ 小到一定程度, X 就只划为一类, 所有元素皆在其中。因此, 模糊等价关系给出的不是一个确定的分类, 而是一个分类系列, 一个动态的分类结果或称一个分类图。我们可以根据实际情况, 选取某一置信水平 λ 上的分类结果。这一优越性, 正是模糊聚类分析的基础。

例 2.12 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, R \in F(U \times U)$,

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 0.41 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵不难看出 \tilde{R} 是自反和对称的。经验证可知它满足 $\tilde{R}^2 \subseteq \tilde{R}$, 因此 \tilde{R} 又是传递的, 因此 \tilde{R} 是等价模糊关系。

λ 从大到小依次取 λ 截关系 R_λ , 则 R_λ 是经典等价关系, 它诱导的 U 的划分 U/R_λ , 将 U 分成一系列等价类。

当 $\lambda = 1$ 时:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见此时仅有 $(u_i, u_i) \in R_1, i = 1, 2, \dots, 5$ 。等价类是: $R_1[u_i] = u_i$, 商集是 $U/R_1 = \{R_1[u_i] | i = 1, 2, \dots, 5\}$, U 被划分为 5 类, 每个元素各独自为一类: $\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_3\}, \{u_4\}, \{u_5\}$ 。

实际上当 $0.62 < \lambda \leq 1$ 时, 分类结果都一样。

当 $0.48 < \lambda \leq 0.62$ 时:

$$R_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此时划分为 4 类: $\{u_1, u_3\}, \{u_2\}, \{u_4\}, \{u_5\}$ 。

当 $0.47 < \lambda \leq 0.48$ 时:

$$R_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此时 U 划分为 3 类: $\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_4\}, \{u_5\}$ 。

当 $0.41 < \lambda \leq 0.47$ 时:

$$R_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此时 U 划分为 2 类: $\{u_1, u_2, u_3, u_5\}, \{u_4\}$ 。

当 $0 \leq \lambda \leq 0.41$ 时:

$$R_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

此时 U 只分为一类: $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, 是最粗的分类。

随着 λ 由大到小, 分类由细到粗, 类别由多到少形成一个如图 2.4 的分类图。

模糊等价关系奠定了模糊聚类分析的理论基础。但实际应用中, 得到的模糊关系不一定是等价的, 为此需要对非等价的模糊关系先进行改造然后再分类, 由于聚类分析不是本书关心的重点, 有兴趣的读者请参阅其它参考书中有关聚类分析的章节。

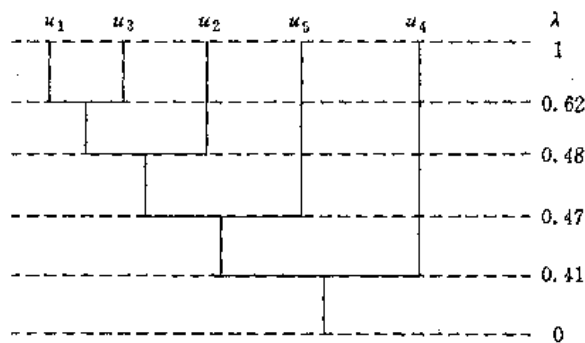


图 2.4 例 2.12 的分类图

第三章 模 糊 数

在许多问题中要求表示模糊数量的概念。如“20岁左右”，“一米八上下”，“约二百三十元”，均为模糊数量。模糊线性规划中目标函数和约束中可以含有模糊数。本章介绍模糊数这类特殊的模糊集以及模糊数的运算。

3.1 模糊数的概念

定义 3.1 设 X 是欧氏空间, $\tilde{A} \in F(X)$ 。

(1) 若 $\forall \lambda \in [0, 1], A_\lambda$ 是 X 上的经典凸子集(即:若 $x_1, x_2 \in A_\lambda, \alpha \in [0, 1]$, 有 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A_\lambda$), 则称 \tilde{A} 为凸模糊集。

(2) 若 $\forall \lambda \in [0, 1], A_\lambda$ 是 X 上的闭子集(即:若 A_λ 内的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x , 有 $x \in A_\lambda$), 则称 \tilde{A} 为闭模糊集。

(3) 若 \tilde{A} 即是闭的又是凸的模糊集, 则 \tilde{A} 是闭凸模糊集。

当 \tilde{A} 为实数域 R 上的模糊集, 则有如下性质:

性质 3.1 若 $\tilde{A} \in F(R)$, 则 \tilde{A} 为凸模糊集的充分必要条件是 $\forall x_1, x_2, x_3 \in R, x_1 \leq x_2 \leq x_3$ 时有:

$$\tilde{A}(x_2) \geq \tilde{A}(x_1) \wedge \tilde{A}(x_3)$$

证明: 先证充分性, 为此, 需对 $\forall \lambda \in [0, 1]$ 证明 A_λ 是凸子集。

对 $\forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2, x_3 \in R, x_1 \leq x_2 \leq x_3$, 若 $x_1, x_3 \in A_\lambda$, 则 $\tilde{A}(x_1) \geq \lambda, \tilde{A}(x_3) \geq \lambda$, 即 $\tilde{A}(x_1) \wedge \tilde{A}(x_3) \geq \lambda$ 。

当 $x_1 \neq x_3$ 时, 令 $\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, 显然 $0 \leq \alpha \leq 1$, 有 $x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3$, 故 $\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3) = \tilde{A}(x_2) \geq \tilde{A}(x_1) \wedge \tilde{A}(x_3) \geq \lambda$ 。那么 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3 \in A_\lambda$ 。

当 $x_1 = x_3$ 时, $x_2 = x_1 = x_3$, 令 $\alpha = 0$ 或 1 , 有 $x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3$, 故 $\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3) = \tilde{A}(x_2) = \tilde{A}(x_1) = \tilde{A}(x_3) \geq \lambda$, 仍有 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3 \in A_\lambda$, 故 A_λ 是凸子集。

因此 \tilde{A} 是凸模糊集。

再证必要性。 \tilde{A} 为凸模糊集, $\forall \lambda \in [0, 1], A_\lambda$ 为凸子集。 $\forall x_1, x_3 \in R, x_1 \leq x_3$, 令 $\lambda_0 = \tilde{A}(x_1) \wedge \tilde{A}(x_3)$, 则 $x_1 \in A_{\lambda_0}$, 且 $x_3 \in A_{\lambda_0}$, 由于 A_{λ_0} 是凸的, 有:

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3 \in A_{\lambda_0}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

令 $x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3$, 因为 $\alpha \in [0, 1]$, 且 $x_1 \leq x_3$, 显然有 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, 于是 $\tilde{A}(x_2) = \tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_3) \geq \lambda_0 = \tilde{A}(x_1) \wedge \tilde{A}(x_3)$ 。

结论得证。

一般凸模糊集的隶属函数的曲线形状应该是凸的, 单峰的, 而不是凹的, 双峰的。

定义 3.2

(1) 设 $\tilde{A} \in F(R)$, 若 \tilde{A} 是正规的凸模糊集, 则称 \tilde{A} 为模糊数, 若 \tilde{A} 是正规的闭凸模糊集, 则称 \tilde{A} 为闭模糊数。

(2) 设 \tilde{A} 为模糊数, 若 $\text{supp } \tilde{A} \subset (0, +\infty)$, 则称 \tilde{A} 为正模糊数, 若 $\text{supp } \tilde{A} \subset (-\infty, 0)$, 则称 \tilde{A} 为负模糊数。

(3) 若 \tilde{A} 是模糊数, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 若 A_λ 有界, 则称 \tilde{A} 为有界模糊数。

由定义可见, 模糊数是一类特殊的模糊集, 它是凸的, 它的核不为空。其隶属函数是单峰的, 在峰顶隶属度达到 1, 它可用来表示隶属函数达到峰值 1 的 x 左右的数。

3.2 模糊数的运算

3.2.1 多元扩张原理

模糊数的运算即模糊集之间的运算, 如果我们把扩张原理推广到多元的情形, 可以通过多元扩张原理来定义模糊数间的运算。

在第二章我们曾给出了经典集合的直积的定义, 经典集合 X_1, X_2, \dots, X_n 的直积为:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

直积也是一个集合, 亦称积集。我们用 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 简记积集的元素, 用特征函数表示直积为:

$$\mu_{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

$$\Leftrightarrow \forall i \leq n, x_i \in X_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \leq n, \mu_{X_i}(x_i) = 1$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n \mu_{X_i}(x_i) = 1$$

$$\text{因此: } \mu_{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n}(x) = \bigwedge_{i=1}^n \mu_{X_i}(x_i)$$

将上述特征函数推广到隶属函数, 可以定义模糊集合的直积。

定义 3.3 设 $\tilde{A}_i \in F(X_i), i = 1, 2, \dots, n, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, 令:

$$(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n \tilde{A}_i(x_i) \quad (3.1)$$

则 $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n \in F(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$, 称 $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$ 为 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ 的直积或迪卡尔积, 或积集。

模糊集合的直积有以下性质。

性质 3.2

$$(1) (\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n)_\lambda = (\tilde{A}_1)_\lambda \times (\tilde{A}_2)_\lambda \times \dots \times (\tilde{A}_n)_\lambda$$

$$(2) (\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n)_\lambda = (\tilde{A}_1)_\lambda \times (\tilde{A}_2)_\lambda \times \dots \times (\tilde{A}_n)_\lambda$$

$$(3) \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda((\tilde{A}_1)_\lambda \times (\tilde{A}_2)_\lambda \times \dots \times (\tilde{A}_n)_\lambda)$$

证明: (1) $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n)_\lambda$

$$\Leftrightarrow (\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n \underset{\sim}{A}_i(x_i) \geq \lambda$$

$$\Leftrightarrow \forall i \leq n, \underset{\sim}{A}_i(x_i) \geq \lambda$$

$$\Leftrightarrow \forall i \leq n, x_i \in (\underset{\sim}{A}_i)_\lambda$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\underset{\sim}{A}_1)_\lambda \times (\underset{\sim}{A}_2)_\lambda \times \cdots \times (\underset{\sim}{A}_n)_\lambda$$

所以:

$$(\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)_\lambda = (\underset{\sim}{A}_1)_\lambda \times (\underset{\sim}{A}_2)_\lambda \times \cdots \times (\underset{\sim}{A}_n)_\lambda$$

(2) 证明同(1)。

(3) 由分解定理和性质(1) 直接可得。

定义 3.4 (多元扩张原理)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是经典集, 直积空间上的映射

$$f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m \rightarrow Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_m) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

可以诱导出映射

$$f: F(X_1) \times F(X_2) \times \cdots \times F(X_m) \rightarrow F(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n)$$

$$(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m) \mapsto f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m)$$

和映射

$$f^{-1}: F(Y_1) \times F(Y_2) \times \cdots \times F(Y_n) \rightarrow F(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m)$$

$$(\underset{\sim}{B}_1, \underset{\sim}{B}_2, \cdots, \underset{\sim}{B}_n) \mapsto f^{-1}(\underset{\sim}{B}_1, \underset{\sim}{B}_2, \cdots, \underset{\sim}{B}_n)$$

其中 $f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m)$ 与 $f^{-1}(\underset{\sim}{B}_1, \underset{\sim}{B}_2, \cdots, \underset{\sim}{B}_n)$ 的隶属函数由下式得出:

$$\forall y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$$

$$f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m)(y) = \bigvee_{(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in f^{-1}(y)} \left(\bigwedge_{i=1}^m \underset{\sim}{A}_i(x_i) \right)$$

$$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m,$$

设 $f(x) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 那么:

$$f^{-1}(\underset{\sim}{B}_1, \underset{\sim}{B}_2, \cdots, \underset{\sim}{B}_n)(x) = \bigwedge_{i=1}^n \underset{\sim}{B}_i(y_i) \quad (3.2)$$

由式(3.2), 当 $(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m)$ 经多元扩张映射成 $f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m)$ 时, 一个原象 $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in f^{-1}(y)$ 传递给其象的隶属度为 $\bigwedge_{i=1}^m \underset{\sim}{A}_i(x_i)$, 如果不是单射, 有多个原象, 那么所有的原象隶属度 $\bigwedge_{i=1}^m \underset{\sim}{A}_i(x_i)$ 的最大值作为象的隶属度。而对于映射 f^{-1} , 每个原象 $x, f(x) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 其隶属度均取其象 (y_1, y_2, \cdots, y_n) 的隶属度 $\bigwedge_{i=1}^n \underset{\sim}{B}_i(y_i)$ 。

以上推导中, 有一些符号表达容易混淆, 我们罗列如下, 以便区别。

X : 一个经典集合(或论域), 其元素为 $x, x \in X$ 。

$F(X)$: X 上的所有模糊集合, 其元素为 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A} \in F(X)$ 。

$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$: 经典集合的积集, 也是一个经典集合, 其元素为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in X_i, i=1, 2, \cdots, n$ 。

$\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n$: 模糊集合的直积, 也是一个模糊集合, 其元素为 (x_1, x_2, \cdots, x_n) ,

$x_i \in X_i, A_i \in F(X_i), i=1, 2, \dots, n$.

$F(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$: $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 直积空间上的所有模糊集合, 其元素为 $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n, \tilde{A}_i \in F(X_i), i=1, 2, \dots, n$.

$F(X_1) \times F(X_2) \times \dots \times F(X_n)$: $F(X_1), F(X_2), \dots, F(X_n)$ 的直积, 其元素为 $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n), \tilde{A}_i \in F(X_i), i=1, 2, \dots, n$.

由分解定理可以证明多元扩张映射有如下性质:

性质 3.3 设 $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n, f$ 诱导出 f 和 f^{-1} 两个多元扩张映射, 则:

$$\begin{aligned} (1) & f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m) \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f((\tilde{A}_1)_\lambda, (\tilde{A}_2)_\lambda, \dots, (\tilde{A}_m)_\lambda) \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f((\tilde{A}_1)_\lambda, (\tilde{A}_2)_\lambda, \dots, (\tilde{A}_m)_\lambda) \\ (2) & f^{-1}(\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_n) \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}((\tilde{B}_1)_\lambda, (\tilde{B}_2)_\lambda, \dots, (\tilde{B}_n)_\lambda) \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}((\tilde{B}_1)_\lambda, (\tilde{B}_2)_\lambda, \dots, (\tilde{B}_n)_\lambda) \end{aligned}$$

多元扩张原理可以将实数集 R 上的二元运算 “ $*$ ” 扩张成 R 上模糊集间的相应运算 “ $*$ ”。

设映射

$$\begin{aligned} * : R \times R &\rightarrow R \\ (x, y) &\mapsto z = * (x, y) = x * y \end{aligned}$$

根据多元扩张原理有:

$$\begin{aligned} * : F(R) \times F(R) &\rightarrow F(R) \\ (\tilde{A}, \tilde{B}) &\mapsto * (\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{A} * \tilde{B} \end{aligned}$$

则 $\tilde{A} * \tilde{B}$ 的隶属函数为:

$$(\tilde{A} * \tilde{B})(z) = \bigvee_{x+y=z} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y)) \quad (3.3)$$

3.2.2 模糊数的运算

多元扩张原理可以将 R 上的二元运算扩张为模糊集间的相应运算, 更具体地说是把闭区间 $[0, 1]$ 上的二元运算 “ $*$ ” 扩充为模糊集之间的 “ $*$ ” 运算, 即映射

$$* : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

诱导出 $\tilde{A} * \tilde{B}$, 它的隶属函数由式 (3.3) 确定。

模糊数是一类特殊的模糊集。因此模糊数之间的二元运算同样由式 (3.3) 确定。那么对于算术运算和取大取小运算有下列模糊数运算公式:

$$\begin{aligned} (\tilde{A} + \tilde{B})(z) &= \bigvee_{x+y=z} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y)) \\ (\tilde{A} - \tilde{B})(z) &= \bigvee_{x-y=z} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y)) \\ (\tilde{A} \cdot \tilde{B})(z) &= \bigvee_{x \cdot y=z} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y)) \\ (\tilde{A} \div \tilde{B})(z) &= \bigvee_{x \div y=z} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y)) \end{aligned}$$

$$(\tilde{A} \vee \tilde{B})(z) = \bigvee_{x \vee y = z} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y))$$

$$(\tilde{A} \wedge \tilde{B})(z) = \bigvee_{x \wedge y = z} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(y))$$

这里要求模糊数的函数是连续的,因为在不连续时对某些运算可能出现怪现象。

例 3.1 设:

$$\tilde{2} = \{0/1, 0.5/1.5, 1/2, 0.5/2.5, 0/3\}$$

$$\tilde{3} = \{0/2, 0.5/2.5, 1/3, 0.5/3.5, 0/4\}$$

用上述公式可以求得:

$$\tilde{2} + \tilde{3} = \{0/3, 0/3.5, 0.5/4, 0.5/4.5, 1/5, 0.5/5.5, 0.5/6, 0/6.5, 0/7\}$$

$$\tilde{2} \cdot \tilde{3} = \{0/2, 0/2.5, 0/3, 0/3.5, 0.5/3.75, 0/4, 0.5/4.5, 0.5/5, 0.5/5.25, 1/6, 0.5/6.25, 0.5/7, 0.5/7.5, 0/8, 0.5/8.75, 0/9, 0/10, 0/10.5, 0/12\}$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } (\tilde{2} + \tilde{3})(4) &= \bigvee_{x+y=4} (\tilde{2}(x) \wedge \tilde{3}(y)) \\ &= (\tilde{2}(1) \wedge \tilde{3}(3)) \vee (\tilde{2}(1.5) \wedge \tilde{3}(2.5)) \\ &\quad \vee (\tilde{2}(2) \wedge \tilde{3}(2)) \\ &= (0 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

余类推。

$\tilde{2} + \tilde{3}$ 似乎还较合理,可是 $\tilde{2} \cdot \tilde{3}$ 的隶属函数则出现了多次起伏,破坏了模糊数的凸性,故结果不再是模糊数。

我们不加证明地给出模糊数运算的如下性质。

性质 3.4 设 \tilde{A} 和 \tilde{B} 为两个连续的模糊数, $*$ 是连续递增的二元运算,则 $\tilde{A} * \tilde{B}$ 也是连续的模糊数。

由于加法和乘法都是连续递增的二元运算,故模糊数对其上的加法和乘法结果也是连续的模糊数。

例 3.2 设 $\tilde{2}$ 和 $\tilde{3}$ 的隶属函数分别为:

$$\tilde{2}(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

和

$$\tilde{3}(y) = \begin{cases} y-2, & 2 \leq y \leq 3 \\ 4-y, & 3 < y \leq 4 \end{cases}$$

如图 3.1 所示。

试求 $\tilde{2} + \tilde{3}$ 和 $\tilde{2} \cdot \tilde{3}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } (\tilde{2} + \tilde{3})(z) &= \bigvee_{x+y=z} (\tilde{2}(x) \wedge \tilde{3}(y)) \\ &= \bigvee_x (\tilde{2}(x) \wedge \tilde{3}(z-x)) \end{aligned}$$

当 $x \in [1, 2], y \in [2, 3]$ 时, $z \in [3, 5]$, 此时:

$$\tilde{2}(x) = x-1, \tilde{3}(y) = \tilde{3}(z-x) = (z-x)-2$$

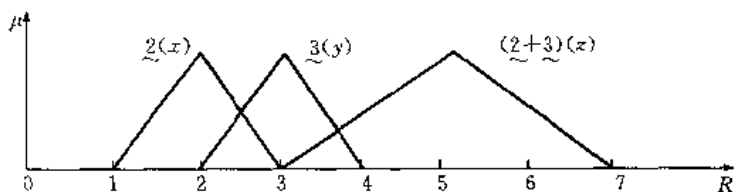


图 3.1 $\underline{2}(x)$, $\underline{3}(y)$ 和 $(\underline{2}+\underline{3})(z)$

对 $\forall z \in [3, 5]$, 例如 $z_0 = 3.5$, 当 x 由 $1 \rightarrow 2$, y 对应地由 $z_0 - 1 \rightarrow z_0 - 2$, 即 $2.5 \rightarrow 1.5$, 其隶属函数曲线如图 3.2 所示。

$\underline{2}(x)$ 与 $\underline{3}(y)$ 取小 $\underline{2}(x) \wedge \underline{3}(y)$ 即图中带阴影的曲线, 而 $\bigvee_{x+y=3.5} (\underline{2}(x) \wedge \underline{3}(y))$ 则是两条曲线的交点的纵坐标, 即 $\mu = \underline{2}(x) = \underline{3}(3.5 - x)$ 。对于 $\forall z \in [3, 5]$, 则有 $\mu = \underline{2}(x) = \underline{3}(z - x)$, 即:

$$\mu = x - 1 = (z - x) - 2$$

消去 x 有: $\mu = z - (\mu + 1) - 2 = z - \mu - 3$

因此有:

$$\mu = \frac{1}{2}(z - 3)$$

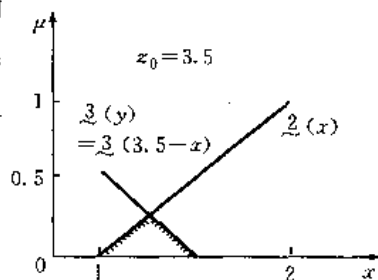


图 3.2 例 3.2 解的图示

同理, 当 $x \in [2, 3]$, $y \in [3, 4]$ 时, $z \in [5, 7]$, 此时有 $\mu = \frac{1}{2}(7 - z)$ 。于是:

$$(\underline{2} + \underline{3})(z) = \mu = \begin{cases} \frac{1}{2}(z - 3), & z \in [3, 5] \\ \frac{1}{2}(7 - z), & z \in [5, 7] \end{cases}$$

其隶属函数曲线如图 3.1 所示。

下面再看 $\underline{2} \cdot \underline{3}$ 。

当 $x \in [1, 2]$, $y \in [2, 3]$ 时, $z \in [2, 6]$, 类似 $\underline{2} + \underline{3}$, 此时有:

$$\bigvee_{x \cdot y = z} (\underline{2}(x) \wedge \underline{3}(y)) = \mu = (x - 1) = z/x - 2$$

消去 x 得:

$$\mu^2 + 3\mu + 2 - z = 0$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\sqrt{9 + 4(z - 2)} - 3)$$

由上式可求出 z 在 2, 3, 4, 5, 6 各点 $\underline{2} \cdot \underline{3}(z)$ 分别为 0, 0.3, 0.56, 0.79, 1。

同样当 $x \in [2, 3]$, $y \in [3, 4]$ 时, $z \in [6, 12]$, 可得:

$$\mu = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{49 - 4(12 - z)})$$

由上式可求出 z 在 6, 8, 10, 12 各点 $(\underline{2} \cdot \underline{3})(z)$ 分别为 1, 0.63, 0.3, 0。

于是我可以归纳出:

$$(\underline{2} \cdot \underline{3})(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{9+4(z-2)}-3), & 2 \leq z \leq 6 \\ \frac{1}{2}(7-\sqrt{49-4(12-z)}), & 6 < z \leq 12 \end{cases}$$

其图形如图 3.3。

由例 3.2 可见,在 $\underline{2}(x), \underline{3}(y)$ 连续时, $(\underline{2} + \underline{3})(z)$ 与 $(\underline{2} \cdot \underline{3})(z)$ 也是连续的凸函数, $\underline{2} + \underline{3}$ 和 $\underline{2} \cdot \underline{3}$ 也是连续的模糊数。

用上述的公式 $(\underline{A} * \underline{B})(z) = \bigvee_{x+y=z} (\underline{A}(x) \wedge \underline{B}(y))$ 进行模糊数的二元运算 $\underline{A} * \underline{B}$ 还是比较困难的。将多元扩张原理的性质 3.3 应用于二元映射 $*$, 有:

$$\underline{A} * \underline{B} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{A}_\lambda * \underline{B}_\lambda) \quad (3.4)$$

当 \underline{A} 和 \underline{B} 为有界闭模糊数时, \underline{A}_λ 和 \underline{B}_λ 都是闭区间, 我们称闭区间为闭区间数, 于是有界闭模糊数的运算就转化为闭区间数的运算, 按着经典扩张原理, 闭区间数的运算为:

$$[a, b] * [c, d]$$

$$= \{z | z = x * y, x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

对于闭区间数的四则运算和取大、取小运算, 有以下结果:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac \wedge ad \wedge bc \wedge bd, ac \vee ad \vee bc \vee bd]$$

$$[a, b] \div [c, d] = [(a/c) \wedge (a/d) \wedge (b/c) \wedge (b/d), (a/c) \vee (a/d) \vee (b/c) \vee (b/d)]$$

$$[a, b] \vee [c, d] = [a \vee c, b \vee d]$$

$$[a, b] \wedge [c, d] = [a \wedge c, b \wedge d]$$

当 $[a, b], [c, d]$ 为正闭区间数时:

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd]$$

$$[a, b] \div [c, d] = [a/d, b/c]$$

可见区间数的运算比较简单。取 $\lambda = [0, 1]$ 的多个值进行 $\underline{A}_\lambda * \underline{B}_\lambda$ 的区间数运算后, 可由式 (3.4) $\underline{A} * \underline{B} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{A}_\lambda * \underline{B}_\lambda)$ 大致得出 $\underline{A} * \underline{B}$ 隶属函数的形状。

例 3.3 模糊数 $\underline{2}, \underline{3}, \underline{2}(x), \underline{3}(y)$ 的形状同例 3.2 的图 3.1。

我们可得:

$$\underline{2}_\lambda = \begin{cases} 2, & \lambda = 1 \\ [1.75, 2.25], & \lambda = 0.75 \\ [1.5, 2.5], & \lambda = 0.5 \\ [1.25, 2.75], & \lambda = 0.25 \end{cases}$$

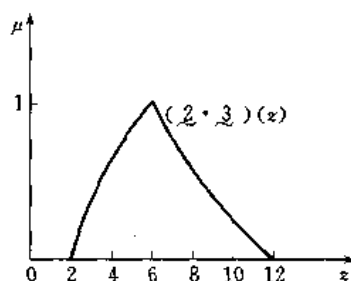


图 3.3 $\underline{2} \cdot \underline{3}$

$$3_{\lambda} = \begin{cases} 3, & \lambda = 1 \\ [2.75, 3.25], & \lambda = 0.75 \\ [2.5, 3.5], & \lambda = 0.5 \\ [2.25, 3.75], & \lambda = 0.25 \end{cases}$$

$$2_{\lambda} + 3_{\lambda} = \begin{cases} 5, & \lambda = 1 \\ [4.5, 5.5], & \lambda = 0.75 \\ [4, 6], & \lambda = 0.5 \\ [3.5, 6.5], & \lambda = 0.25 \end{cases}$$

于是我们可以由图 3.4, 合成 $\tilde{2} + \tilde{3} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(2_{\lambda} + 3_{\lambda})$, 当 λ 取遍了 $[0,1]$, 便合成了如图虚线所示的 $(\tilde{2} + \tilde{3})(x)$ 。

同样可以求得:

$$2_{\lambda} \cdot 3_{\lambda} = \begin{cases} 6, & \lambda = 1 \\ [4.8125, 7.3125], & \lambda = 0.75 \\ [3.75, 8.75], & \lambda = 0.5 \\ [2.8125, 10.3125], & \lambda = 0.25 \end{cases}$$

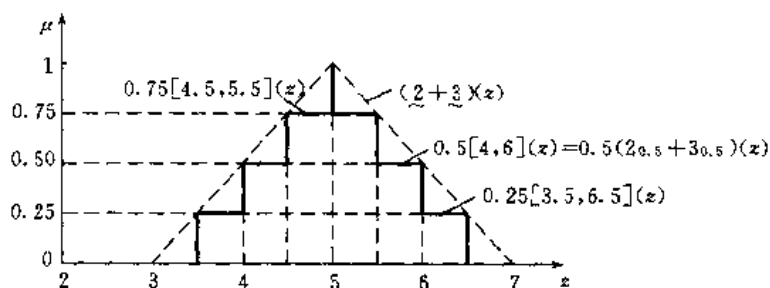


图 3.4 由区间数合成 $\tilde{2} + \tilde{3}$

于是有图 3.5, 合成 $\tilde{2} \cdot \tilde{3}$ 。

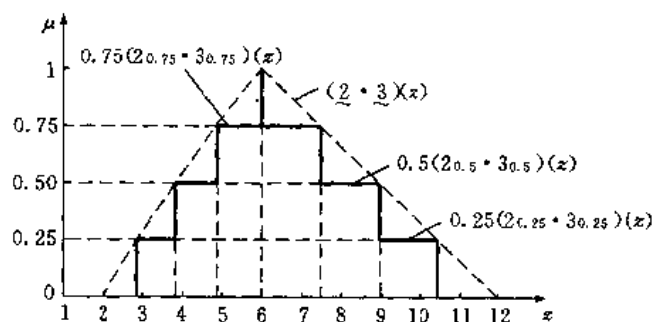


图 3.5 由区间数合成 $\tilde{2} \cdot \tilde{3}$

比较图 3.4 和图 3.1, 图 3.5 和图 3.3, 可见两种方法求得的结果是一致的。

模糊数的运算有下列性质:

性质 3.5

若 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 为有界闭模糊数, $\lambda \in [0, 1]$, 则有如下性质:

- (1) $(\tilde{A} \pm \tilde{B})_\lambda = \tilde{A}_\lambda \pm \tilde{B}_\lambda$
- (2) $(\tilde{A} \cdot \tilde{B})_\lambda = \tilde{A}_\lambda \cdot \tilde{B}_\lambda$
- (3) $(\tilde{A} \div \tilde{B})_\lambda = \tilde{A}_\lambda \div \tilde{B}_\lambda$
- (4) $\tilde{A} \pm \tilde{B} = \tilde{B} \pm \tilde{A}$
- (5) $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$
- (6) $(\tilde{A} + \tilde{B}) + \tilde{C} = \tilde{A} + (\tilde{B} + \tilde{C})$
- (7) $(\tilde{A} \times \tilde{B}) \times \tilde{C} = \tilde{A} \times (\tilde{B} \times \tilde{C})$
- (8) 当 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 还是正模糊数时有:

$$\tilde{A} \times (\tilde{B} + \tilde{C}) = (\tilde{A} \times \tilde{B}) + (\tilde{A} \times \tilde{C})$$

3.3 L-R 模糊数及其运算

L-R 模糊数是一类特殊的模糊数, 它的四则运算, 取大取小运算比一般模糊数更为方便。

定义 3.5 设 L 是实数域 R 到 $[0, 1]$ 的映射

$$L: R \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto L(x)$$

若 L 满足以下条件:

- (1) $L(x) = L(-x)$
- (2) $L(0) = 1$
- (3) $L(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 单调递减

则称 $L(x)$ 为模糊数的基准函数。

以下函数都可作为基准函数, 满足定义规定的条件。

- (1) $L(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$
- (2) $L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\}, p \geq 0$
- (3) $L(x) = e^{-|x|^p}, p \geq 0$
- (4) $L(x) = \frac{1}{1 + |x|^p}, p \geq 0$

定义 3.6 设 $L(x), R(x)$ 为模糊数的基准函数, 若:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & x \leq m, (\alpha > 0) \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & x > m, (\beta > 0) \end{cases}$$

则称 \tilde{A} 为 **L-R 模糊数**, 记为 $\tilde{A} = (m; \alpha, \beta)_{LR}$, 其中 L, R 分别为左、右基准函数, m 称为均值, α, β 分别称为左、右分布。

约定 $\alpha = \beta = 0$ 时, L-R 模糊数 \tilde{A} 变为通常的实数, 即 $(m, 0, 0)_{LR} = m$ 。

在上一小节的例 3.2 中, $\tilde{2}$ 和 $\tilde{3}$ 均是 L-R 模糊数, 其基准函数均为:

$$L(x)=R(x)=\max\{0,1-|x|\} \\ = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{其它 } x \text{ 值} \end{cases}$$

左、右分布均为: $\alpha=\beta=1, 2$ 和 3 的均值分别为 $m=2$ 和 $m=3$, 因此:

$$\tilde{2} = (2; 1, 1)_{LR}, \tilde{3} = (3; 1, 1)_{LR}$$

L-R 模糊数运算方便, 下面逐步给出 L-R 模糊数的运算规则。为此先给出下述定理。

定理 3.1 设 \tilde{M}, \tilde{N} 是两个模糊数, $*$ 是连续递增的二元运算(即 $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ 时有: $x_1 * y_1 > x_2 * y_2$), $[\lambda_m, \rho_m]$ 与 $[\lambda_n, \rho_n]$ 分别是隶属函数 $\tilde{M}(x)$ 与 $\tilde{N}(y)$ 两个非减的区间部分(或两个非增的区间部分), 对于 $\forall x \in [\lambda_m, \rho_m]$ 和 $\forall y \in [\lambda_n, \rho_n]$, 当:

$$\tilde{M}(x) = \tilde{N}(y) = \omega \in [0, 1]$$

则: 对于 $\forall z \in [\lambda_m, \rho_m] * [\lambda_n, \rho_n], z = x * y$ 有 $(\tilde{M} * \tilde{N})(z) = \omega$ 。

证明: 因为 $*$ 是连续递增运算, 因此:

$$[\lambda_m, \rho_m] * [\lambda_n, \rho_n] = \{x * y | x \in [\lambda_m, \rho_m], y \in [\lambda_n, \rho_n]\} \\ = [\lambda_m * \lambda_n, \rho_m * \rho_n]$$

由于 $[\lambda_m, \rho_m]$ 和 $[\lambda_n, \rho_n]$ 也是连续的, 若 $z \in [\lambda_m * \lambda_n, \rho_m * \rho_n]$, 则 $\exists x_0 \in [\lambda_m, \rho_m]$ 和 $\exists y_0 \in [\lambda_n, \rho_n]$, 使得 $z = x_0 * y_0$ 且 $\tilde{M}(x_0) = \tilde{N}(y_0) = \omega \in [0, 1]$, 于是由扩张原理:

$$(\tilde{M} * \tilde{N})(z) = \bigvee_{x * y = z} (\tilde{M}(x) \wedge \tilde{N}(y)) \\ \geq \tilde{M}(x_0) \wedge \tilde{N}(y_0) = \omega \quad (3.5)$$

另一方面, 当 $\tilde{M}(x), \tilde{N}(x)$ 非减时:

$\forall x * y = z, x \in [\lambda_m, \rho_m], y \in [\lambda_n, \rho_n]$, 当 $x \leq x_0, \tilde{M}(x) \leq \tilde{M}(x_0)$, 于是:

$$\tilde{M}(x) \wedge \tilde{N}(y) \leq \tilde{M}(x) \leq \tilde{M}(x_0) = \omega$$

当 $x \geq x_0$, 因 $*$ 递增, $x * y = z = x_0 * y_0$, 因此, $y \leq y_0, \tilde{N}(y) \leq \tilde{N}(y_0)$, 于是:

$$\tilde{M}(x) \wedge \tilde{N}(y) \leq \tilde{N}(y) \leq \tilde{N}(y_0) = \omega$$

因此:

$$(\tilde{M} * \tilde{N})(z) = \bigvee_{x * y = z} (\tilde{M}(x) \wedge \tilde{N}(y)) \leq \omega \quad (3.6)$$

综合(3.5)和(3.6)两式得:

$$(\tilde{M} * \tilde{N})(z) = \omega$$

当 $\tilde{M}(x), \tilde{N}(x)$ 非增时:

$\forall x * y = z, x \in [\lambda_m, \rho_m], y \in [\lambda_n, \rho_n]$, 当 $x \geq x_0, \tilde{M}(x) \leq \tilde{M}(x_0)$, 于是:

$$\tilde{M}(x) \wedge \tilde{N}(y) \leq \tilde{M}(x) \leq \tilde{M}(x_0) = \omega$$

当 $x \leq x_0$, 因 $*$ 递增, $x * y = z = x_0 * y_0$, 因此, $y \geq y_0, \tilde{N}(y) \leq \tilde{N}(y_0)$, 于是:

$$\tilde{M}(x) \wedge \tilde{N}(y) \leq \tilde{N}(y) \leq \tilde{N}(y_0) = \omega$$

因而同样可得式(3.6), 也就同样得:

$$(\tilde{M} * \tilde{N})(z) = \omega$$

证毕。

由此定理可以看出, 如果我们把 $\tilde{M}(x), \tilde{N}(y), (\tilde{M} * \tilde{N})(z)$ 画在以实数 R 为横坐标,

隶属度 μ 为纵坐标的同一坐标系中,如图 3.6,然后在纵坐标点取一点 $\omega \in [0,1]$,过此点画一条横坐标的平行线,则它与 $\tilde{M}(x), \tilde{N}(y), (\tilde{M} * \tilde{N})(z)$ 的递增段交点 x_0, y_0, z_0 及递减段交点 x'_0, y'_0, z'_0 , 有如下关系:

$$x_0 * y_0 = z_0, x'_0 * y'_0 = z'_0$$

如果我们已知 $\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)$, 求 $\tilde{M} * \tilde{N}$, 可以取一个点 $\omega \in [0,1]$, 画一条横坐标的平行线, 交 $\tilde{M}(x)$ 与 $\tilde{N}(y)$ 分别于 x_0, x'_0 与 y_0, y'_0 , 依公式 $z_0 = x_0 * y_0, z'_0 = x'_0 * y'_0$ 求出 z_0 与 z'_0 , 并在平行线 ω 上标出此两点。依次类推, 取够足够多的 $\omega \in [0,1]$, 就可画出 $(\tilde{M} * \tilde{N})(z)$ 的曲线。

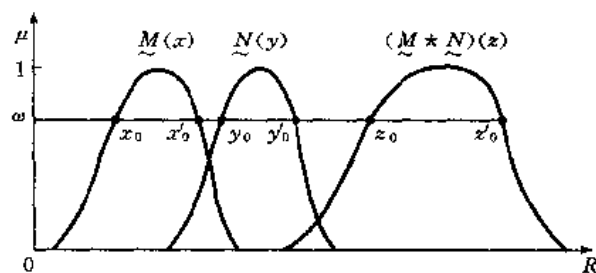


图 3.6 $\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)$ 和 $(\tilde{M} * \tilde{N})(z)$

由定理 3.1 可以推出 L-R 模糊数的下述加法运算规则。

定理 3.2 设 $\tilde{M} = (m; \alpha, \beta)_{LR}, \tilde{N} = (n; \gamma, \delta)_{LR}$, 则 $\tilde{M} + \tilde{N} = (m+n; \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$

证明: 设:

$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & x > m \end{cases} \quad \text{其中 } \alpha, \beta > 0$$

$$\tilde{N}(y) = \begin{cases} L\left(\frac{n-y}{\gamma}\right), & y \leq n \\ R\left(\frac{y-n}{\delta}\right), & y > n \end{cases} \quad \text{其中 } \gamma, \delta > 0$$

先考查递增部分: $\forall x \leq m, \forall y \leq n$, 由闭区间数的运算, $\forall z \leq m+n$ 。

由定理 3.1, 若 $\tilde{M}(x) = \tilde{N}(y) = \omega$, 即:

$$L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) = L\left(\frac{n-y}{\gamma}\right) = \omega$$

有 $(\tilde{M} + \tilde{N})(z) = \omega, z = x + y$

由于在此区间 L 是单调递增, 是单值函数, 因此:

$$\frac{m-x}{\alpha} = \frac{n-y}{\gamma}$$

对 $\forall z \leq m+n$ 解下述方程组:

$$\begin{cases} x + y = z \\ \frac{m-x}{\alpha} = \frac{n-y}{\gamma} \end{cases} \quad (3.7)$$

得:

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha(z-n) + \gamma m}{\alpha + \gamma} \leq m \\ y = \frac{\gamma(z-m) + \alpha n}{\alpha + \gamma} \leq n \end{cases} \quad (3.8)$$

即 $\forall z \leq m+n$, 总可以得一组解 $x \leq m, y \leq n$ 满足方程组式(3.7)。

将式(3.8)的第一式代入到式(3.7)的第二式左端得:

$$\frac{m-x}{\alpha} = \frac{n-y}{\gamma} = \frac{m+n-z}{\alpha+\gamma}$$

因此

$$(\tilde{M} + \tilde{N})(z) = \omega = L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) = L\left(\frac{n-y}{\gamma}\right) = L\left(\frac{m+n-z}{\alpha+\gamma}\right)$$

同理, 在递减区间, $\forall z \geq m+n$, 有:

$$(\tilde{M} + \tilde{N})(z) = R\left(\frac{z-(m+n)}{\beta+\delta}\right)$$

所以: $\tilde{M} + \tilde{N} = (m+n; \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$ 。

例 3.4 例 3.2 中的 $\tilde{2}, \tilde{3}$ 均为 L-R 模糊数, 根据定理 3.2 的运算法则求 $\tilde{2} + \tilde{3}$ 。

解: $\tilde{2} = (2; 1, 1)_{LR}, \tilde{3} = (3; 1, 1)_{LR}$

$$L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$$

于是: $\tilde{2} + \tilde{3} = (2+3; 1+1, 1+1)_{LR}$

$$= (5; 2, 2)_{LR}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{2} + \tilde{3})(x) &= \begin{cases} L\left(\frac{5-x}{2}\right), & x \leq 5 \\ R\left(\frac{x-5}{2}\right), & x > 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \vee \left(1 - \left|\frac{5-x}{2}\right|\right), & x \leq 5 \\ 0 \vee \left(1 - \left|\frac{x-5}{2}\right|\right), & x > 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(x-3), & 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{2}(7-x), & 7 \geq x > 5 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

定义 3.7 $\lambda \in R, \lambda \neq 0, A$ 是模糊数。令:

$$(\lambda \tilde{A})(x) = \tilde{A}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

称 $\lambda \tilde{A}$ 为模糊数 \tilde{A} 与 λ 的数乘, 或标量积。

定理 3.3 设 $\tilde{A} = (m; \alpha, \beta)_{LR}$, 则:

$\lambda > 0$ 时, $\lambda \tilde{A} = \lambda(m; \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m; \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR}$

$\lambda < 0$ 时, $\lambda \tilde{A} = \lambda(m; \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m; -\lambda \beta, -\lambda \alpha)_{RL}$

证明: 当 $\lambda > 0$ 时, 由定义 3.7 有:

$$(\lambda A)_{\sim}(x) = A_{\sim}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} L\left[\frac{m - \frac{x}{\lambda}}{a}\right] = L\left(\frac{\lambda m - x}{\lambda a}\right), & x \leq \lambda m \\ R\left[\frac{\frac{x}{\lambda} - m}{\beta}\right] = R\left(\frac{x - \lambda m}{\lambda \beta}\right), & x > \lambda m \end{cases}$$

当 $\lambda < 0$ 时:

$$\begin{aligned} (\lambda A)_{\sim}(x) &= \begin{cases} L\left[\frac{m - \frac{x}{\lambda}}{a}\right] = L\left(\frac{x - \lambda m}{-\lambda a}\right), & x > \lambda m \\ R\left[\frac{\frac{x}{\lambda} - m}{\beta}\right] = R\left(\frac{\lambda m - x}{-\lambda \beta}\right), & x \leq \lambda m \end{cases} \\ &= \begin{cases} R\left(\frac{\lambda m - x}{-\lambda \beta}\right), & x \leq \lambda m \\ L\left(\frac{x - \lambda m}{\lambda a}\right), & x > \lambda m \end{cases} \end{aligned}$$

所以: $\lambda > 0$ 时, $\lambda(m; a, \beta)_{LR} = (\lambda m; \lambda a, \lambda \beta)_{LR}$

$\lambda < 0$ 时, $\lambda(m; a, \beta)_{LR} = (\lambda m; -\lambda \beta, -\lambda a)_{RL}$

结合定理 3.2 和 3.3 可得出 L-R 模糊数减法运算的规则:

$$\begin{aligned} (m; a, \beta)_{LR} - (n; \gamma, \delta)_{LR} \\ &= (m; a, \beta)_{LR} + (-1)(n; \gamma, \delta)_{LR} \\ &= (m; a, \beta)_{LR} + (-n; \delta, \gamma)_{RL} \end{aligned}$$

当基准函数 $L(x) = R(x)$ 时, 有

$$\begin{aligned} (m; a, \beta)_{LR} - (n; \gamma, \delta)_{LR} \\ &= (m - n; a + \delta, \beta + \gamma)_{LR} \end{aligned}$$

故它仍是 L-R 型模糊数。

但 L-R 模糊数的乘积却不再是 L-R 型模糊数。不过, 我们可以把它近似表示成 L-R 模糊数:

$m > 0, n > 0$ 时:

$$(m; a, \beta)_{LR} \times (n; \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn; m\gamma + na, m\delta + n\beta)_{LR}$$

$m < 0, n > 0$ 时:

$$(m; a, \beta)_{LR} \times (n; \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn; na - m\delta, n\beta - m\gamma)_{LR}$$

$m < 0, n < 0$ 时:

$$(m; a, \beta)_{LR} \times (n; \gamma, \delta)_{LR} \approx (mn; -na - m\delta, -n\beta - m\gamma)_{LR}$$

例如例 1.10 中的 $2 \cdot 3$, 有:

$$\underline{2} \cdot \underline{3} = (2; 1, 1)_{LR} (3; 1, 1)_{LR} \approx (6; 5, 5)_{LR}$$

与例 3.2 的结果相比,还是有些差距的,是个近似的结果。

另外还可以证明若 $\tilde{m} = (m; \alpha, \beta)_{LR}, \tilde{n} = (n; \gamma, \delta)_{LR}$, 则;

$$\tilde{m} \vee \tilde{n} \approx (m \vee n; \alpha \wedge \gamma, \beta \vee \delta)_{LR}$$

$$\tilde{m} \wedge \tilde{n} \approx (m \wedge n; \alpha \vee \gamma, \beta \wedge \delta)_{LR}$$

$$\tilde{m} \leq \tilde{n} \Leftrightarrow \tilde{m} \vee \tilde{n} = \tilde{n} \Leftrightarrow m \leq n, \alpha \geq \gamma, \beta \leq \delta$$

第四章 模糊语言

语言是思维的表现形式,思维是语言的内容,两者不可分割。思维活动中,思维的内涵总是经过一定的形式来实现,一般需要运用概念,作出判断,进行推理。概念反映了某种客观事物和某种属性,在语言中表现为词或词组,判断和推理表现为句子。判断句和推理句,可以是一个或一组句子。

人类思维的一个重要特点是“具有运用模糊概念的能力”,因而在人类的语言中也充斥着反映模糊概念的词汇,如年青、年老、较大、较小、差不多、大概、近似等等,不胜枚举。利用模糊概念进行的判断和推理是模糊判断和模糊推理。如:这个西瓜熟了;这个系统动态品质不错;如果西红柿红了,那么西红柿就熟了,这个西红柿红透了,因此这个西红柿熟透了,等等。因此带有模糊性的词、句的语言在人类的自然语言中是随处可见。模糊性是人类思维的一大特长,也是人类自然语言的一大特点。

模糊语言和模糊推理逻辑引入了模糊数学的方法对人类的语言和思维进行定量分析和描述,为人类的智能活动寻找合适的数学模型。模糊数学的方法较之传统的定量方法,可以较好地描述具有模糊性的人类的自然语言,模拟人类的思维过程,因此模糊语言有希望成为人类自然语言的合理模型。

计算机科学发展的方向,是要使计算机能更完美地模拟人脑的思维,代替部分人类的脑力劳动,具有更高的智能。要实现这一目标,一个重要环节是能使自然语言转化为机器所能接受的形式语言。这是一项具有重大意义和广阔前景的研究。模糊语言的研究正是朝着这一远大目标努力。

目前模糊语言的研究还是初步的,理论很不成熟,有待继续研究发展。人们已经开展了能处理模糊概念的模糊程序设计语言的研究,并取得某些成果。在某些领域,将该领域的少数术语定量化,以便计算机处理,解决该领域的问题,也是很有成效的。如“模糊控制”,就是将有经验的领域专家和操作者用带有模糊性的语言总结出的语言控制规则,加以定量的描述而设计出模糊控制器,在实际应用中取得了较好的效果。

4.1 模糊语言的概念

在普通的形式语言中,所谓语言是定义在有限字符集上的字符序列(字符串)的集合。一个字符串是否为一个合法的语言成分是可以明确判定的。但在自然语言中情况则有所不同,例如句子“你到哪儿去了?”如果认为是完全合法的,那么由同样的字符组成的句子“到哪儿去了你?”、“哪儿去了你到?”、“你去到哪儿了?”等等虽然不完全符合语法,但也大概表达出了基本意思,可以认为不完全错。因此我们会很自然地想到用隶属函数来表示它们属于合法句子集合的程度。那么可以把合法语句成分看作定义在所有可能字符串上的一个模糊集合,而不是一个经典集合。另外,对于各种语言成份的语义,我们也用定义在不

同论域上的模糊集来表示,如“年老”、“年轻”用定义在年龄论域上的模糊集来表示它们的语义,“高个儿”、“矮个儿”用定义在高度论域上的模糊集来表示,等等。

自然语言在某种意义上可以用下述的模糊模型来描述。

定义 4.1 一种模糊语言 FL 定义为一个四元组:

$$FL = (U, T, E, N)$$

其中:(1) U 为语言主题的全体对象,即论域;

(2) T 是语言成分或者说“项”的模糊集合;

(3) E 为构成语言成分的字符集中的字符所构成的所有字符序列(字符串)的集合,称它为对 T 的嵌入集合, T 是 E 上的模糊子集;

(4) N 为 E 对 U 的模糊关系,称为命名关系。上述 U, T, E, N 的关系可用图 4.1 来表示。图中 $\mu_N(x, y)$ 说明 $x \in E$ 与 $y \in U$ 中的关联程度。

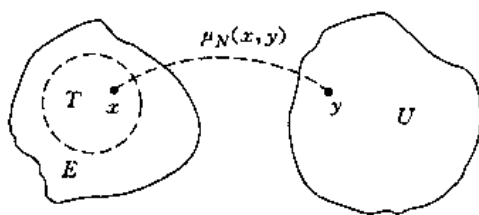


图 4.1 U, T, E, N 的关系

以下对上述概念作进一步解释。

模糊语言的要素 U 是论域,是指 FL 所讨论的主题下所涉及的所有的对象。如 U 可以是整数或实数的集合,颜色的集合,味的集合,等等。如果不是在讨论某个主题下的模糊语言,而是论及整个自然语言,那么 U 将是多个主题下论域的并集,是一个包罗万象的大论域。

所有的语言成分都是由有限个字符合理地组合而成。组成语言成分的字符集(如英文的 26 个字母和语法符号)所能组合成的全部有限长度的字符序列,包括合理的、不合理的及在某种程度上合理字符序列的集合即为 E 。

T 是模糊语言的语言成分集合,或说是项集合,一般指词汇和句子的集合。 T 是 E 上的模糊集合, E 中的一个字符串 x 是否属于一个合理的语言成分,由它对 T 的隶属度 $\mu_T(x)$ 来刻画。词是 T 的重要成分,它可分为原子词和合成词两类。原子词不具有子序列,不可再分,而合成词则由原子词组合而成,例如“大”、“树”均为原子词,而“大树”、“树大”则为合成词。

T 为 E 上的一个模糊子集,其隶属函数 $\mu_T(x)$ 表明 E 中的字符串 x 在什么程度上是合法的语言成分 T 。其实 T 的支集 $\text{supp}T$ 中字符串均在某种程度上是合法的语言成分 T 。例如,设 E 是汉语的词汇、句子的集合,则可定义:

$$\mu_T(\text{中等身材})=1$$

$$\mu_T(\text{中等高矮})=0.7$$

$$\mu_T(\text{非高又比矮长})=0.2$$

$$\mu_T(\text{你到哪儿去了?})=1$$

$$\mu_T(\text{你哪儿去了?})=0.95$$

$$\mu_T(\text{到哪儿去了你?})=0.7$$

$$\mu_T(\text{哪儿去了你到?})=0.4$$

$$\mu_T(\text{你哪儿了?})=0.2$$

$$\mu_T(\text{你了哪到儿?})=0$$

又如, E 为字符集 $\{a, b, +\}$ 上字符串的全体, T 代表代数式, 那么 E 中几个有代表性的序列属于 T 的隶属度可定义为:

$$\mu_T(a+b)=1, \quad \mu_T(a+b+b)=1$$

$$\mu_T(+a)=0.8, \quad \mu_T(+a+b)=0.8$$

$$\mu_T(++a)=0.1, \quad \mu_T(a+b+)=0$$

命名关系 N 是 $E \times U$ 上的模糊关系:

$$\mu_N: E \times U \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \mapsto \mu_N(x, y)$$

其中 $x \in E, y \in U$ 。

例如, 设 U 为年龄 0 到 100 的集合 $[0, 100]$, 令 x 为词“青年”, $y=30$ 岁, 则有:

$$\mu_N(\text{青年}, 30) = 0.5$$

同样可有:

$$\mu_N(\text{青年}, 35)=0.2$$

$$\mu_N(\text{青年}, 40)=0.1$$

$$\mu_N(\text{青年}, 25)=1$$

$$\mu_N(\text{青年}, 20)=1$$

可见, 25 岁命名为“青年”是名符其实, 40 岁则已名不符实, 而 30 岁则在 0.5 的程度上符合, 算半个青年人。

要想完整地定义模糊语言, 只要对所有的 $x \in E$, 或更明确地说是 E 中隶属度不为 0 的元素, 即 $x \in \text{supp}T$, 及 $y \in U$, 把 μ_N 的值一一表示出来就可以。但当 $\text{supp}T$ 和 U 中的元素数量很多时, 定义 $\mu_N(x, y)$ 就很困难。

如果确定 $\mu_T(x), \mu_N(x, y)$ 不是采用一一定义的办法, 而是可以得出它们的结构, 并根据这种结构进行计算就可以得到, 这种模糊语言我们称为结构化的模糊语言。

定义 4.2 所谓结构化的模糊语言 FL 是指如下五元组:

$$FL = (U, T, E, S_T, S_N)$$

其中: (1) U 是论域;

(2) T 是语言成分的集合;

(3) E 是对 T 的嵌入集合;

(4) S_T 是 FL 的语法规则所组成的集合, 是为计算 T 中隶属函数 μ_T 提供算法;

(5) S_N 是 FL 的语义规则所组成的集合, 是为计算命名关系 N 的隶属函数 μ_N 提供算法。

定义 4.1 与 4.2 的差别在于, 在定义 4.1 的非结构化的模糊语言中, 对于模糊集 T

及命名关系 N 的隶属函数 μ_T 和 μ_N 是预先清楚给出的,而定义 4.2 的结构化模糊语言中,存在使用语法规则和语义规则计算 μ_T 及 μ_N 的结构。

我们说结构化和非结构化的语言是模糊的,是指 T 或 N 或两者均为模糊集合的情况,当两者均为非模糊集时,即非模糊语言,程序设计语言就是非模糊的结构化语言。

4.2 模糊语义

凡是语言都是用有限长度的字符串去表示一定的意义,语言的字符串与其意义的对应关系称为语义。

语义的一个重要问题是要规定一组语义规则,以它作为算法,通过各原子间的已知涵义,计算出合成词的涵义。1971 年,扎德提出模糊语义定量的理论,接着定义了完备的“语言变量”的概念,使得一些以实数集为论域的词汇及一些具有程度性质的词汇有了定量的语义描述。

下面我们先给出语义的定义。

定义 4.3 所谓 T 中术语 x 的语义是 U 上的模糊子集 $M(x)$,这时 U 中的元素 y 属于 $M(x)$ 的隶属度由下式给出:

$$\mu_{M(x)}(y) = \mu_N(x, y)$$

例 4.1 设 U 是 0 到 100 年龄的集合 $[0, 100]$, T 为术语年纪, $E = \{\text{年轻、年老、中年}\}$, N 为 E 到 U 的模糊命名关系,扎德给出:

$$\begin{aligned}\mu_N(\text{年轻}, y) &= \begin{cases} 1, & y < 25 \\ \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & y \geq 25 \end{cases} \\ \mu_N(\text{年老}, y) &= \begin{cases} 0, & y < 50 \\ \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^2\right)^{-1}, & y \geq 50 \end{cases} \\ \mu_N(\text{中年}, y) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq y < 35 \\ \left(1 + \left(\frac{y-45}{4}\right)^4\right)^{-1}, & 35 \leq y < 45 \\ \left(1 + \left(\frac{y-45}{5}\right)^2\right)^{-1}, & y \geq 45 \end{cases}\end{aligned}$$

那么,词年轻的语义则表示为 $U = [0, 100]$ 上的模糊子集 $M(\text{年轻})$,而且有 $\mu_{M(\text{年轻})}(y) = \mu_N(\text{年轻}, y)$,即:

$$\mu_{M(\text{年轻})}(y) = \begin{cases} 1, & y < 25 \\ \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & y \geq 25 \end{cases}$$

同样也可求出老年,中年的语义 $M(\text{年老})$ 和 $M(\text{中年})$ 。

例 4.2 让我们考虑“几个”这一模糊词:设 U 为非负整数集,则几个可以由下述 U 上的模糊集 $M(\text{几个})$ 表达其语义:

$$M(\text{几个}) = \{0.4/3, 0.8/4, 1.0/5, 1.0/6, 0.9/7, 0.4/8\}$$

其中只记有隶属度大于零的情况。

在例 4.1 中,词“年轻”、“年老”、“中年”可视为表示年纪的原子词,那么由此还可组合出很多合成词,组合的方法可由原子词加连接词“或”、“且”,否定词“非”,如组合词“年轻或年老”,“不年轻”等;组合的方法还可以由原子词加表示程度的词“很”、“极”、“略”、“较”等,如“很年轻”,“较年老”等;组合的方法还可以是原子词加模糊化的修饰词如“大概”、“近似”等,另外还有表示判定意义的修饰词为“偏向”、“倾向于”、“多半是”等,给出一种粗略的判断,它们和原子词组合成合成词,而且一个原子词可以和以上这几种修饰词多重组合成合成词,合成词又可以连接等等,这样可组合成较复杂的合成词。这些名目繁多的合成词如果都要一一定义其语义,也就是——给出其隶属函数曲线,是件非常繁琐的工作,机器处理也要占有较大的存储空间。为简化这一问题,扎德等学者提出用语义算子的方法来处理这一问题。算子可分如下几种。

1. 语气算子 H_λ

设: $H_\lambda: F(U) \rightarrow F(U)$

$$\tilde{A} \mapsto H_\lambda \tilde{A}$$

$$H_\lambda \tilde{A}(y) = (\tilde{A}(y))^\lambda, y \in U$$

称 H_λ 为语气算子,当 $\lambda > 1$ 时 H_λ 为集中化算子, $\lambda < 1$ 时 H_λ 称散漫化算子,特别地有:

$$\lambda = 4, \mu_{\text{很}\tilde{A}} = \mu_{H_4\tilde{A}} = (\mu_{\tilde{A}})^4$$

$$\lambda = 2, \mu_{\text{相当}\tilde{A}} = \mu_{H_2\tilde{A}} = (\mu_{\tilde{A}})^2$$

$$\lambda = 1.25, \mu_{\text{相当}\tilde{A}} = \mu_{H_{1.25}\tilde{A}} = (\mu_{\tilde{A}})^{1.25}$$

$$\lambda = 0.75, \mu_{\text{比较}\tilde{A}} = \mu_{H_{0.75}\tilde{A}} = (\mu_{\tilde{A}})^{0.75}$$

$$\lambda = 0.5, \mu_{\text{略}\tilde{A}} = \mu_{H_{0.5}\tilde{A}} = (\mu_{\tilde{A}})^{0.5}$$

$$\lambda = 0.25, \mu_{\text{微}\tilde{A}} = \mu_{H_{0.25}\tilde{A}} = (\mu_{\tilde{A}})^{0.25}$$

略 \tilde{A} 和微 \tilde{A} 也可说是有点 \tilde{A} 和略有点 \tilde{A} 。

由语气算子 H_λ 和例 4.1 中的原子词可以组合成很多合成词,例如:很老,相当老,有点老等等,其语义如下:

$$\mu_{M(\text{很老})}(y) = (\mu_{M(\text{老})}(y))^2 = \begin{cases} 0, & y < 50 \\ \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2}, & y \geq 50 \end{cases}$$

$$\mu_{M(\text{相当老})}(y) = (\mu_{M(\text{老})}(y))^{1.25} = \begin{cases} 0, & y < 50 \\ \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1.25}, & y \geq 50 \end{cases}$$

$$\mu_{M(\text{有点老})}(y) = (\mu_{M(\text{老})}(y))^{0.5} = \begin{cases} 0, & y < 50 \\ \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-0.5}, & y \geq 50 \end{cases}$$

2. 模糊化算子 F

“大概”、“近似”、“似乎”、“大约”等修饰词加在一个词前面使词义模糊化,称模糊化算子,其数学表达如下。

设: $F: F(U) \rightarrow F(U)$

$$\underline{\tilde{A}} \mapsto F \underline{\tilde{A}}$$

$F \underline{\tilde{A}}$ 的隶属函数定义为: $\forall y \in U$

$$\mu_{F \underline{\tilde{A}}}(y) = \bigvee_{t \in U} (\mu_{\underline{\tilde{A}}}(t) \wedge \mu_E(t, y))$$

式中, E 是 U 上的模糊相似关系, 当 U 为实数集 R 时, 常取:

$$\mu_E(t, y) = \begin{cases} e^{-\alpha |y-t|^2}, & |t-y| < \delta \\ 0, & |t-y| \geq \delta \end{cases}$$

式中 δ 为参数, F 称模糊化算子。

特别当 $\underline{\tilde{A}}$ 为经典集时, 经算子 F 作用后得到一个模糊集 $F \underline{\tilde{A}}$ 。

例如, 数字 3 的语义对应一个经典集:

$$\mu_{M(3)}(y) = \begin{cases} 1, & y = 3 \\ 0, & y \neq 3 \end{cases}$$

于是:

$$\begin{aligned} \mu_{M(\text{大约}3)}(y) &= \mu_{M(F3)}(y) = \bigvee_{t \in R} (\mu_{M(3)}(t) \wedge \mu_E(t, y)) \\ &= \begin{cases} \mu_E(3, y) = e^{-(3-y)^2}, & |y-3| < \delta \\ 0, & |y-3| \geq \delta \end{cases} \end{aligned}$$

3. 判定化算子 P_α

设: $P_\alpha: F(U) \rightarrow F(U)$

$$\underline{\tilde{A}} \mapsto P_\alpha \underline{\tilde{A}}$$

$$\mu_{P_\alpha \underline{\tilde{A}}}(y) = d_\alpha(\mu_{\underline{\tilde{A}}}(y))$$

这里 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 且 d_α 是定义在 $[0, 1]$ 上如下形式的函数:

$$d_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{1}{2}, & \alpha < x \leq 1 - \alpha \\ 1, & 1 - \alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

则称 P_α 为判定化算子。这里 d_α 的意义在于, 它给出了一个标定标准: 当 $\mu_A(y) \leq \alpha$ 时, 判定 y 不偏向于 $\underline{\tilde{A}}$; 当 $\mu_A(y) > 1 - \alpha$ 时, 判定 y 偏向于 $\underline{\tilde{A}}$; 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $P_{\frac{1}{2}}$ 称为“偏向”此时:

$$d_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

例 4.1 中年轻的语义定义为:

$$\mu_{M(\text{年轻})}(y) = \begin{cases} 1, & x \leq 25 \\ \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & x > 25 \end{cases}$$

那么合成词偏向年轻即 $P_{\frac{1}{2}}$ 年轻的语义为:

$$\mu_{M(\text{偏向年轻})}(y) = \begin{cases} 1, & x \leq 30 \\ 0, & x > 30 \end{cases}$$

这表明年龄小于等于 30 岁是偏向年轻,而年龄大于 30 岁则不算偏向年轻。

4. 连接与否定算子

连接词为“或”和“且”,由它们连接两个词而组合成一个新的合成词,或和且可表示为求并运算“ \cup ”和求交运算“ \cap ”。那么“词 1 或词 2”和“词 1 且词 2”的语义就分别由下两式求出:

$$\mu_{M(\text{词1或词2})}(y) = \mu_{M(\text{词1})}(y) \vee \mu_{M(\text{词2})}(y)$$

$$\mu_{M(\text{词1且词2})}(y) = \mu_{M(\text{词1})}(y) \wedge \mu_{M(\text{词2})}(y)$$

否定词“非”、“不”加在一个词前面,就否定了原来词的词义,可以把它解释成一个算子,这个算子把每个模糊集转化为其补集:

$$\mu_{M(\text{非某词})}(y) = 1 - \mu_{M(\text{某词})}(y)$$

例如:合成词“年轻或年老”、“不年轻”的语义为:

$$\mu_{M(\text{年轻或年老})}(y) = \mu_{M(\text{年轻})}(y) \vee \mu_{M(\text{年老})}(y)$$

$$= \begin{cases} 1, & y \leq 25 \\ \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & 25 < y < 51 \\ \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^2\right)^{-1}, & y \geq 51 \end{cases}$$

$$\mu_{M(\text{不年轻})}(y) = 1 - \mu_{M(\text{年轻})}(y)$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq 25 \\ 1 - \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & y > 25 \end{cases}$$

以上是几种语义算子的概念及其由它们参与组合的合成词语义的计算规则。这些主要是针对以实数域或其子集为论域的词,对这类词汇,扎德给出了“语言变量”的概念。

定义 4.4 语言变量是由一个五元组来表征,五元组即 $(N, U, T(N), M, G)$, 其中:

- (1) N 是语言变量名;
- (2) U 是 N 的论域;
- (3) $T(N)$ 是 N 的语言值的集合,即 N 的所有取值,其中每个语言值是论域 U 上的模糊集;

(4) M 是词义规则,对 $T(N)$ 中每一个词,赋以词义;

(5) G 是词法规则,生成 $T(N)$ 的规则,由原子词生成合成词的规则。

我们仍以年龄为主题,如图 4.2 所示,其中语言变量名称 N 为年龄,其取值(注意取值为语言值,即词,而不是数值) $T(N)$ 为集合{很年轻,年轻,年老,……},语言值包括原子词及由原子词和各种算子合成的合成词,合成的规则由词法 G 规定, G 指出合成词的

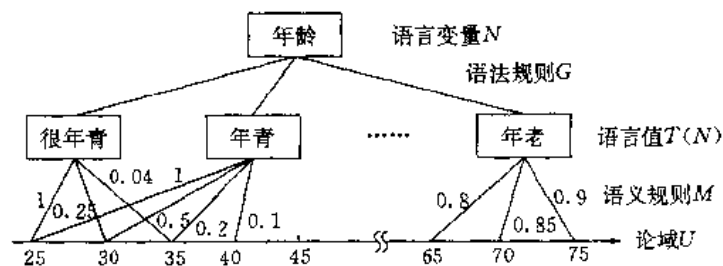


图 4.2 语言变量“年龄”

词义变化规则。论域 U 对年龄主题来讲为实数域上的子集,可取 $[0,100]$ 甚至 $[0,200]$,其原因是显而易见的。

4.3 模糊语法

模糊语言的语法的研究也是很初步的,用它来描述实际的自然语言的语法是很不充分的,现在还没有找到描述自然语言的语法的最佳模型。模糊语法是对普通形式语言的语法的扩张和模糊化。

首先,我们对语法使用的一些概念和术语作一些介绍。

V_T 是终极符的有限集合,例如英文的字母表, V_T^* 是 V_T 中的元素(即字符)连结起来组成的有限序列(即字符串)的全体。比如,设 $V_T = \{a, b\}$ 则

$$V_T^* = \{\epsilon, a, b, ab, ba, aa, bb, aba, \dots\}$$

空串 ϵ 也是 V_T^* 的元素。

V_N 为非终极符的有限集,表示名词、动词、名词短语等的语法类型的符号,都是 V_N 的元素,终极符与非终极符的集合 V_T 与 V_N 互相排斥,即 $V_T \cap V_N = \emptyset$ 。

若设结构化的模糊语言 $FL = (U, T, E, S_T, S_N)$ 中 $E = V_T^*$, 则语言成份集合或称项集合 T 是 V_T^* 上的模糊集合,它用对各字符串 $x \in V_T^*$ 的隶属函数 $\mu_T(x)$ 表示其特征。

为了表示模糊集 T ,我们采用如下简便的方式:

$$T = \mu_T(x_1)x_1 + \mu_T(x_2)x_2 + \mu_T(x_3)x_3 + \dots$$

例如,设 $V_T = \{a, b\}$ 则 T 可表示为:

$$T = 1.0a + 0.8b + 0.6ab + 0.3aa + 0.1bb$$

我们规定对隶属度为 0 的字符串不予列出,即仅以 T 的支集 $\text{supp}T = \{x | \mu_T(x) > 0\}$ 中的元素为对象。

对模糊集合 T 的并、交、补、连接、闭包等可作为形式语法的扩展,定义如下。

设 T_1, T_2, T 为 V_T^* 上的模糊集,有:

- (1) T_1 与 T_2 的并记为 $T_1 + T_2$, $\mu_{T_1+T_2}(x) = \mu_{T_1}(x) \vee \mu_{T_2}(x)$;
- (2) T_1 与 T_2 的交记为 $T_1 \cap T_2$, $\mu_{T_1 \cap T_2}(x) = \mu_{T_1}(x) \wedge \mu_{T_2}(x)$;
- (3) T 的补集记为 \bar{T} , $\mu_{\bar{T}}(x) = 1 - \mu_T(x)$;
- (4) T_1 与 T_2 的连接用 $T_1 T_2$ 表示,定义为:若 $x \in V_T^*$ 可以表示为前部分字符串 u_i 与

后部分字符串 v_i 的毗连, 即 $x = u_i v_i$, i 表示不同的连接方式, 则:

$$\mu_{T_1 T_2}(x) = \bigvee_i (\mu_{T_1}(u_i) \wedge \mu_{T_2}(v_i)) \quad (4.1)$$

设: $T = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \dots$

$$T' = \mu'_1 x'_1 + \mu'_2 x'_2 + \mu'_3 x'_3 + \dots$$

若 x_i 与 x'_j 的连接用 $x_i x'_j$ 表示, 则 T 与 T' 的连接 TT' 为:

$$TT' = \sum_i \sum_j (\mu_i \wedge \mu'_j) x_i x'_j \quad (4.2)$$

属于连接 TT' 的字符串 $x_i x'_j$ 的隶属函数, 由上式整理, 将所有毗连为 $x_i x'_j$ 的字符串的隶属度取大即可:

$$\mu_{TT'}(x_i x'_j) = \bigvee_{x_i x'_j} (\mu_T(x_i) \wedge \mu_{T'}(x'_j))$$

例 4.3 $V_T = \{a, b\}$, $T = 0.2a + 0.3ab + 1.0aba$, $T' = 0.3a + 0.8aba + 1.0\epsilon$, 其中 ϵ 为空串, 求 TT' 。

$$\begin{aligned} \text{解: } TT' &= (0.2 \wedge 0.3)aa + (0.2 \wedge 0.8)aaba + (0.2 \wedge 1.0)a + (0.3 \wedge 0.3)aba + (0.3 \\ &\quad \wedge 0.8)ababa + (0.3 \wedge 1.0)ab + (1.0 \wedge 0.3)abaa + (1.0 \wedge 0.8)abaaba + \\ &\quad (1.0 \wedge 1.0)aba \\ &= 0.2aa + 0.2aaba + 0.2a + 0.3aba + 0.3ababa + 0.3ab + 0.3abaa + \\ &\quad 0.8abaaba + 1.0aba \end{aligned}$$

由于 $0.3aba + 1.0aba = (0.3 \vee 1.0)aba = 1.0aba$, 故

$$TT' = 0.2aa + 0.2aaba + 0.2a + 1.0aba + 0.3ababa + 0.3ab + 0.3abaa + 0.8abaaba$$

有了以上的预备知识, 以下我们给出模糊语法的定义。

定义 4.5 模糊语法是以下四元组组成的系统:

$$G = (V_T, V_N, S, P)$$

其中: (1) V_T 为终极符的集合;

(2) V_N 为非终极符的集合, 并且 $V_N \cap V_T = \emptyset$;

(3) $S \in V_N$ 为初始符号, 表示构造语言成分的语法范畴;

(4) P 是如下模糊生成规则式所组成的有限集合:

$$\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$$

其中 α, β 为 $(V_T \cup V_N)^*$ 中的字符串, $((V_T \cup V_N)^*$ 表示由 $V_T \cup V_N$ 的字符所生成的有限长字符串的全体), 其中 $\alpha \neq \epsilon$, ρ 满足 $0 < \rho \leq 1$, 表示 α 已给时 β 的隶属度 (在普通构造语法中 $\alpha \rightarrow \beta$ 表示书写替换规则)。

因此, 当 $\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$, 设 γ, δ 为 $(V_T \cup V_N)^*$ 中的任意字符串, 则有:

$$\gamma\alpha\delta \xrightarrow{\rho} \gamma\beta\delta$$

我们称 $\gamma\beta\delta$ 是由 $\gamma\alpha\delta$ 直接导出。

设 u 和 v 是 $(V_T \cup V_N)^*$ 中的字符串, 若存在 $(V_T \cup V_N)^*$ 中的序列 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, 并当:

$$u \xrightarrow{\rho_1} \alpha_1 \xrightarrow{\rho_2} \alpha_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\rho_{n-1}} \alpha_{n-1} \xrightarrow{\rho_n} v$$

时,则称 v 是可由 u 用导出链 $(u, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, v)$ 导出的。

这个导出链的强度定义为链中最薄弱环节的强度,即:

$$(u, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, v) \text{ 的强度} \\ = \min(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \bigwedge_{i=1}^n \rho_i$$

u 与 v 之间的关系强度 ρ 规定为 u 与 v 之间所有导出链中最强的导出链的强度,即:

$$\rho = \bigvee_j \left(\bigwedge_{i=1}^n \rho_i \right) \quad (4.3)$$

式中 j 为 u 到 v 的导出链的个数:

由模糊说法 G 生成模糊语言成分 T 用下述方式定义。

定义 4.6 模糊语法 G 生成模糊语言成分集合 T , 记为 $T(G)$, 的方式定义如下:

(1) 终极字符串 x (即 V_T 中的字符串) 在 $T(G)$ 的支集中, 是指 x 可由 S 导出。

(2) x 的隶属度 $\mu_T(x)$ 用 S 与 x 之间的关系强度给出, 即由式 4.3 给出。

例 4.4 在模糊语法 $G = (V_T, V_N, S, P)$ 中, $V_T = \{a, b\}$, $V_N = \{A, B, S\}$, P 则由下述规则给出:

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{0.5} AB, & A &\xrightarrow{0.5} a, \\ S &\xrightarrow{0.8} A, & A &\xrightarrow{0.6} b, \\ S &\xrightarrow{0.8} B, & B &\xrightarrow{0.4} A, \\ AB &\xrightarrow{0.4} BA, & B &\xrightarrow{0.2} a \end{aligned}$$

首先我们求终极字符串 ab , 其导出链罗列如下:

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{0.5} AB \xrightarrow{0.5} aB \xrightarrow{0.4} aA \xrightarrow{0.6} ab \\ S &\xrightarrow{0.5} AB \xrightarrow{0.4} AA \xrightarrow{0.5} aA \xrightarrow{0.6} ab \\ S &\xrightarrow{0.5} AB \xrightarrow{0.4} BA \xrightarrow{0.2} aA \xrightarrow{0.6} ab \\ S &\xrightarrow{0.5} AB \xrightarrow{0.4} BA \xrightarrow{0.4} AA \xrightarrow{0.5} aA \xrightarrow{0.6} ab \end{aligned}$$

4 个导出链的强度分别为:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (0.5 \wedge 0.5 \wedge 0.4 \wedge 0.6) = 0.4 \\ \rho_2 &= (0.5 \wedge 0.4 \wedge 0.5 \wedge 0.6) = 0.4 \\ \rho_3 &= (0.5 \wedge 0.4 \wedge 0.2 \wedge 0.6) = 0.2 \\ \rho_4 &= (0.5 \wedge 0.4 \wedge 0.4 \wedge 0.5 \wedge 0.6) = 0.4 \end{aligned}$$

故: $\mu_T(ab) = \rho_1 \vee \rho_2 \vee \rho_3 \vee \rho_4$

$$\begin{aligned} &= 0.4 \vee 0.4 \vee 0.2 \vee 0.4 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

定义 4.7 所谓两个模糊语法 G_1, G_2 是等价的, 是指它们生成相同模糊语言成分, 即:

$$T(G_1) = T(G_2)$$

例如, 容易验证例 4.4 给出的模糊语法:

$$G = (\{a, b\}, \{A, B, S\}, S, P)$$

与模糊语法 G' 等价, G' 及其生成式如下规定:

$$G' = (\{a, b\}, \{A, B, C, S\}, S, P')$$

生成式为:

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{0.5} AB, & A &\xrightarrow{0.5} a \\ S &\xrightarrow{0.8} A, & A &\xrightarrow{0.6} b \\ S &\xrightarrow{0.8} B, & B &\xrightarrow{0.4} A \\ AB &\xrightarrow{0.4} BC, & B &\xrightarrow{0.2} a \\ AC &\xrightarrow{1.0} BC, \\ BC &\xrightarrow{1.0} BA. \end{aligned}$$

下面我们讨论模糊语法的代数形式表示的生成式。

G 的语法可由代数形式表示, 为此作如下规定:

(1) 用幂级数形式表示模糊集 T , 即:

$$T = \mu_T(x_1)x_1 + \mu_T(x_2)x_2 + \dots$$

(2) 按式 4.2 定义模糊集的连接, 即:

$$TT' = \sum_i \sum_j (\mu_i \wedge \mu'_j) x_i x'_j$$

(3) λT 为模糊集合, 字符串 $x \in T$ 的隶属度表示为:

$$\mu_{\lambda T}(x) = \lambda \wedge \mu_T(x) \quad (4.4)$$

这里 $\lambda \in (0, 1]$, 即 $0 < \lambda \leq 1$, λT 可以认为是连接 $T'T$ 中 $T' = \lambda \epsilon$ 的情况。

因此模糊语法中生成式:

$$\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$$

可由下式代替:

$$\alpha = \rho\beta$$

其中 α, β 是 $(V_T \cup V_N)^*$ 中的字符串。 $\rho\beta$ 可以看成为式(4.4)所定义的字符串的模糊集合, 因此有:

$$\mu_{\rho\beta}(x) = \rho \wedge \mu_\beta(x)$$

当 P 像下面这样含有左边相同的生成式时, 即:

$$\begin{aligned} \alpha &\xrightarrow{\rho_1} \beta_1 \\ \alpha &\xrightarrow{\rho_2} \beta_2 \end{aligned}$$

可导出下式:

$$\alpha = \rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2$$

例 4.5 例 4.4 的生成式用代数形式表达, 则成为:

$$S = 0.5AB + 0.8A + 0.8B \quad (4.5)$$

$$AB = 0.4BA \quad (4.6)$$

$$A = 0.5a + 0.6b \quad (4.7)$$

$$B = 0.4A + 0.2a \quad (4.8)$$

为了求出这个语法 G 所生成的字符串的模糊集 $T(G)$, 对上述 4 个代数形式的生成式求解初始符号 S 即可。为此要用终极符字符串 V_T^* 来表示 S , 使用式 4.4 逐步达到这一目的。

式(4.7)代入式(4.8):

$$\begin{aligned} B &= 0.4(0.5a + 0.6b) + 0.2a \\ &= (0.4 \wedge 0.5)a + (0.4 \wedge 0.6)b + 0.2a \\ &= 0.4a + 0.4b + 0.2a \\ &= (0.4 \vee 0.2)a + 0.4b \\ &= 0.4a + 0.4b \end{aligned} \quad (4.9)$$

式(4.9)及式(4.7)代入式(4.6):

$$\begin{aligned} AB &= 0.4BA \\ &= 0.4(0.4a + 0.4b)(0.5a + 0.6b) \\ &= 0.4(0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb) \\ &= 0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb \end{aligned} \quad (4.10)$$

将式(4.10)、式(4.7)、式(4.9)代入式(4.5)就可以求出 S :

$$\begin{aligned} S &= 0.5AB + 0.8A + 0.8B \\ &= 0.5(0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb) + 0.8(0.5a + 0.6b) + 0.8(0.4a + 0.4b) \\ &= 0.5a + 0.6b + 0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb \end{aligned}$$

于是: $T(G) = S$

我们把 $T(G)$ 写成模糊集合的标准形式:

$$T(G) = 0.5/a + 0.6/b + 0.4/aa + 0.4/ab + 0.4/ba + 0.4/bb$$

也就是说语法 G 生成的字符串 $T(G)$, 在 $V_T^* = \{a, b\}^*$ 集合中包含 6 个隶属度大于 0 的字符串: a, b, aa, ab, ba, bb , 它们对 $T(G)$ 的隶属度分别为: 0.5、0.6、0.4、0.4、0.4、0.4。

与普通的形形式语言一样, 由于在生成式上附加限制因素, 模糊语法可以分为 4 种类型。

1. 0 型模糊语法

0 型模糊语法对生成式:

$$\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$$

不加任何限制, 其中 $\alpha, \beta \in (V_T \cup V_N)^*$, $\alpha \neq \varepsilon$, 这种语法也称为模糊构造语法。

例如生成式:

$$AB \xrightarrow{0.1} BA, \quad ABa \xrightarrow{0.3} Bb, \quad A \xrightarrow{0.9} a$$

2. I 型模糊语法

在生成式:

$$\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$$

$\alpha, \beta \in (V_T \cup V_N)^*$, $\alpha \neq \varepsilon$ 中, 加以下限制: $|\beta| \geq |\alpha|$, $|\alpha|, |\beta|$ 表示字符串 α 和 β 的长度。

例如: $AB \xrightarrow{0.1} BA, A \xrightarrow{0.2} aAbb$, 即为 I 型模糊语法, 而 $BA \xrightarrow{0.5} a$ 则不是。

I 型模糊语法也有如下定义的。

若生成式限制为如下形式:

$$\beta A \gamma \xrightarrow{\rho} \beta \alpha \gamma$$

其中, $A \in V_N, \alpha, \beta, \gamma \in (V_T \cup V_N)^*, \alpha \neq \epsilon$, 这里 A 出现在 $\beta A \gamma$ 的上下文中, A 可由 α 替换, 替换后为 $\beta \alpha \gamma$ 形式的上下文。故而, I 型模糊语法亦称上下文有关模糊语法。

例如, $aAb \xrightarrow{0.3} aab, Ab \xrightarrow{0.3} aaab$, 为 I 型模糊语法的生成式, 而 $AB \xrightarrow{0.1} BBa$ 则不是, 但我们可由下述两式的 I 型模糊语法的生成式代替它:

$$AB \xrightarrow{0.1} ABa$$

$$ABa \xrightarrow{1.0} BBa$$

3. II 型模糊语法

II 型模糊语法的生成式为:

$$A \xrightarrow{\rho} \alpha$$

其中 $A \in V_N, \alpha \in (V_T \cup V_N)^*$, 这意味着与上下文无关, 不论什么情况都可用 α 代替 A , 因此 II 型模糊语法亦称自由型模糊语法。

例如, $B \xrightarrow{0.5} aaBB, A \xrightarrow{0.7} bB$ 均为 II 型模糊语法, 而 $AB \xrightarrow{0.3} a, BA \xrightarrow{0.3} ABb$ 则不是, 因为 $AB, BA \in V_N$ 。

4. III 型模糊语法

III 型模糊语法的生成式取下面的形式:

$$A \xrightarrow{\rho} \alpha B$$

或

$$A \xrightarrow{\rho} \alpha (\text{相当于 } B = \epsilon)$$

其中: $A, B \in V_N, \alpha \in V_T^*$, III 型模糊语法称正规模糊语法。III 型模糊语法限制大。

例如: $A \xrightarrow{0.5} bB, B \xrightarrow{0.3} b$ 为 III 型模糊语法的生成式, 而 $A \xrightarrow{0.3} bAa, AB \xrightarrow{0.5} a$ 等则不是, 它们不符合 III 型模糊语法的限制。

第五章 模糊推理

5.1 逻辑推理概述

逻辑学是研究概念、判断和推理形式特别是推理形式的一门科学。从17世纪德国数学家莱布尼兹开始,不少数学家和哲学家共同努力,把数学方法用于哲学的研究,出现了逻辑与数学相结合的一门新学科——数理逻辑。数理逻辑采用一套符号代替人们的自然语言进行表述,因而又称符号逻辑。数理逻辑在逻辑上只取真、假两个值,是一种二值逻辑。

逻辑学研究的重点就是推理。推理是人类的一种重要的思维方式,它从已知的判断推断出未知的判断。

推理的方式,一般可以分为两种,一种是演绎推理,一种是归纳推理。以一般的普遍适用的原理为前提,推导到某个特殊情况作出结论的推理方法为**演绎推理**。而反过来,由特殊情形的前提,归纳出一般原理的结论的推理称为**归纳推理**。一个是从一般到特殊,一个是从特殊到一般。

数理逻辑主要研究演绎推理。演绎推理一般具有**三段论法**的形式,即从两个判断,得出第三个判断。一个著名的例子就是所谓的苏格拉底论述:

所有的人都是要死的,

苏格拉底是人,

所以苏格拉底总是要死的。

在三段论法中,根据两个前提的不同形式,又有直言推理、假言推理和选言推理之分。

归纳推理又称归纳法,可分为完全归纳法和不完全归纳法。完全归纳法在前提中列出全部推理的特殊情形,而得出一般化结论。这是很严格的,但是当特殊情形过多乃至无限时都难以应用。不完全归纳法仅举出全部特殊情形中的一个或几个而归纳出一般结论。这种情况结论可能有两种情形:一是因举出的部分特殊情形不完全代表事物的规律,因而结论不是可靠的,只能代表一种猜想和假设;二是结论可靠,代表了普遍规律和原理。这是一种科学的不完全归纳法,不只是简单地枚举特殊情形,而是要考虑到这一类事物所特有的本质属性和它所以产生的原因,因而揭示了它们的规律性。

由归纳法派生出来的还有一种类比推理,它是从特殊到特殊的推理过程,根据两个对象的一部分属性相类似,推出两个对象的其它属相类似的一种推理方法。类比的结论也不是一定可靠的,不能称为论证,类比的结论通常需要实践的检验。

数学中一种基本的证明方法——数学归纳法,我们可以把它认为是完全归纳法的一种变态。它用一种简捷的途径,给出了全部特殊情形的判断。从而得到一般结论。

传统的逻辑推理是基于二值逻辑的,它处理的信息和推理的规则是精确的完备的。与此对应,还有一种**不精确推理**,或称不确定性推理,或称近似推理,它处理不精确、不确定、

不完备的信息,利用不精确、不完备的知识、规则。不精确性可由多方面引起,如随机性、模糊性等。基于模糊逻辑方法处理由模糊性引起的不精确推理称**模糊逻辑推理**或简称**模糊推理**。

以模糊集为理论基础的模糊逻辑推理的基本形式是假言推理的模糊化,前提和结论中包含的概念由明确概念变为模糊概念,反应一般规律的大前提可以由模糊关系来表示。由于推理前提可以有更为复杂的形式,模糊逻辑推理基本形式也就相应演变成较复杂的扩充形式。

5.2 二值逻辑和模糊逻辑

5.2.1 二值逻辑

数理逻辑的逻辑值只有真或假,即 1 或 0 两个值,称二值逻辑。在介绍模糊逻辑之前先介绍一下二值逻辑。

用来表达一个完整概念的语言或文字符号称为句子。一个有意义的句子,能够判断它的涵意是真或假时就称为**命题**。一个命题只能是真的或是假的,两者必居其一而且只居其一。试看下面的例句:

- (1) 月球是地球的卫星。
- (2) 地球是不转动的。
- (3) 三角形的三个内角和等于 180° 。
- (4) 牛是食肉动物。
- (5) 请把门关上!
- (6) 今天开会吗?
- (7) 计算机

以上(1),(3)是真的,(2),(4)是假的,它们都是命题,(5)是祈使句不是命题,(6)是疑问句也不是命题,(7)不是句子,因而也不是命题。

一个命题的真或假,称为命题的真假值,简称真值。例如(1)的真值为真,因而也叫真命题,(2)的真值为假,叫假命题。一般用 1 表示真,0 表示假,所以命题的真值只在 $\{0,1\}$ 中取值,因此属于二值逻辑。

上面的命题都是简单命题,亦称**原子命题**。可以用命题联结词把两个或两个以上简单命题联结起来,成为**复合命题**。常用的命题联结词有五个,它们的符号是: \vee , \wedge , \neg , \rightarrow , \leftrightarrow ,涵意如下:

(1) \vee 称为**析取**,是“或”的意思,如果用 P, Q 分别表示两个命题,则联结词 \vee 联结成的复合命题表示为 $P \vee Q$ 。

例如:

P : 他是大学生。

Q : 他是运动员。

则:

$P \vee Q$: 他是大学生或者是运动员。

复合命题 $P \vee Q$ 的真值由它的两个简单命题(也称原子命题) P, Q 的真值来决定, 仅当 P 和 Q 都是假时, $P \vee Q$ 才为假, 其余情况均为真。

(2) \wedge 称为**合取**, 是“与”、“并且”的意思, 如 P, Q 仍是上面假定的两个命题, 则:

$P \wedge Q$: 他是大学生并且是运动员。

$P \wedge Q$ 的真值也决定于 P, Q 的真值, 仅当 P, Q 都是真时, $P \wedge Q$ 才是真。

(3) “ \neg ”是**否定**, P 的否定记作 \bar{P} , 它的涵意是原命题的否定。即如果 P 为真, 则 \bar{P} 为假, 如 P 为假则 \bar{P} 为真。

例如:

P : 他是大学生

则:

\bar{P} : 他不是大学生。

(4) \rightarrow 称为**蕴涵**, 表示“如果……那么……”的意思。

例如:

P : 明天不下雨

Q : 我去看你

则:

$P \rightarrow Q$: 如果明天不下雨, 那么我去看你。

$P \rightarrow Q$ 的真值也由 P, Q 的真值决定, 仅当 P 为真而 Q 为假时, $P \rightarrow Q$ 才为假。其余情况均为真。特别注意当 P 为假时, 不论 Q 真假, $P \rightarrow Q$ 均为真。因此若 $P \rightarrow Q$, 则 P 为真必然有 Q 为真, 否则(即 P 为假)不管(即 Q 可真可假)。

(5) \leftrightarrow 称为**互蕴涵或等价**, 是“当且仅当”的意思。

例如设:

P : A 是等边三角形。

Q : A 是等角三角形。

则:

$P \leftrightarrow Q$: A 是等边三角形当且仅当 A 是等角三角形。

上面五个联结词中, “ \neg ”是一元联结词, 其余四个都是二元联结词。通过联结词构成的复合命题, 它的真值与原子命题真值的关系可以用表来描述, 称为真值表, 如表 5.1 和表 5.2 所示。

表 5.1

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

表 5.2

P	\bar{P}
1	0
0	1

多次使用联结词,可以构成更为复杂的复合命题,但无论多么复杂的复合命题,它的真值仍然由原子命题及联结词的真值表确定,从而构成复杂的复合命题的真值表,现举一例说明如下,例如设:

$$A = (P \vee \bar{Q}) \rightarrow (\bar{P} \wedge Q)$$

可得出 A 的真值表如表 5.3。

表 5.3

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$P \vee \bar{Q}$	$\bar{P} \wedge Q$	$(P \vee \bar{Q}) \rightarrow (\bar{P} \wedge Q)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

$\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ 和原子命题组成的复合命题的真值,也可由公式表示。设 P, Q 为原子命题,其真值分别用 $T(P), T(Q)$ 表示,则:

$$\begin{aligned}
 T(P \vee Q) &= \max(T(P), T(Q)) = T(P) \vee T(Q) \\
 T(P \wedge Q) &= \min(T(P), T(Q)) = T(P) \wedge T(Q) \\
 T(\bar{P}) &= 1 - T(P) \\
 T(P \rightarrow Q) &= (T(P) \wedge T(Q)) \vee (1 - T(P)) \\
 T(P \leftrightarrow Q) &= T(P \rightarrow Q) \wedge T(Q \rightarrow P)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

公式(5.1)与表 5.1 相对应。

虽然在客观世界中不少事物之间的界限是分明的,但也有很多事物之间界限不分明。我们常常例举的年轻人和中年人就是一个明显的例子,因此一个事物仅用真、假两个值来描述,在有些情形下就无能为力,不能客观地描述这些事物的状态及它们之间的相互关系。在模糊数学诞生之前,人们就已经提出了三值逻辑乃至多值逻辑的理论,例如 K 值逻辑,它的逻辑值可以取 $0, 1, \dots, K-1$ 等 K 种值。模糊逻辑出现以后,逻辑值可以在 $[0, 1]$ 闭区间上连续取值,可取无数个值,称为连续值逻辑。从二值,三值, K 值到连续值,从数学描述上只是小小的改变,但它却经历了漫长的年代,凝聚着人类对客观世界认识的艰辛劳动和丰硕成果。模糊逻辑的出现,不仅是对传统的数理逻辑的重大发展,也具有很大的实际意义,它对计算机科学、人工智能、自动控制等方面的发展,都起到很大的促进作用。

5.2.2 模糊逻辑

对应于数理逻辑中命题的概念,模糊逻辑中有模糊命题。**模糊命题**即含有模糊成分的命题,判断结果常常是非真非假,处于真假之间的模棱两可的状态。例如:

他是个胖子。

她长得漂亮。

干扰太大。

我们很难判断这样的命题取真或取假,而说他是胖子的程度是多少更为贴切,对其取值范围 $\{0,1\}$ 扩大到 $[0,1]$,对命题的描述更为贴切合理,因而也更为深刻。

模糊命题用大写字母加一波浪线 \sim 表示,如 \tilde{P} , \tilde{P} 的真值用 $T(\tilde{P})$ 表示, $T(\tilde{P}) \in [0,1]$ 。例如, \tilde{P} :张三是个胖子, $T(\tilde{P})=0.8$ 。

最基本的模糊命题为原子模糊命题。原子模糊命题通过命题联接词 $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ 可联接成复合模糊命题,这些联接词可以多次使用。

(1) \vee 称为析取是“或”的意思, $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ 表示 \tilde{P} 或 \tilde{Q} 。例如:

\tilde{P} :他是个强壮的人。

\tilde{Q} :他是个聪明的人。

$\tilde{P} \vee \tilde{Q}$:他是个强壮的人或是个聪明的人。

$\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ 的真值由下式计算:

$$\begin{aligned} T(\tilde{P} \vee \tilde{Q}) &= \max(T(\tilde{P}), T(\tilde{Q})) \\ &= T(\tilde{P}) \vee T(\tilde{Q}) \end{aligned}$$

(2) \wedge 称为合取,是“与”、“并且”的意思, $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$ 表示 \tilde{P} 且 \tilde{Q} 。例如:

$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$:他是个强壮的人且是个聪明的人。

$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$ 的真值由下式求出:

$$\begin{aligned} T(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) &= \min(T(\tilde{P}), T(\tilde{Q})) \\ &= T(\tilde{P}) \wedge T(\tilde{Q}) \end{aligned}$$

(3) \neg 表示否定,它的涵义是命题的否定,命题的非, $\bar{\tilde{P}}$ 即非 \tilde{P} 。例如: $\bar{\tilde{P}}$:他不是强壮的人。

$\bar{\tilde{P}}$ 的真值按下式求出:

$$T(\bar{\tilde{P}}) = 1 - T(\tilde{P})$$

(4) \rightarrow 表示蕴涵,是“如果……那么……”、“若……则……”的意思。例如:

\tilde{P} :水箱温度偏低

\tilde{Q} :蒸汽阀门被开得较大

$\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$:如果水箱温度偏低,那么蒸汽阀门被开得较大

$\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$ 的真值为:

$$T(\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}) = (T(\tilde{P}) \wedge T(\tilde{Q})) \vee (1 - T(\tilde{P})) \quad (5.2)$$

蕴涵的真值还有其它形式的定义,我们将在后续章节讨论。

(5) \leftrightarrow 表示等价,互蕴涵。

$\tilde{P} \leftrightarrow \tilde{Q}$ 的真值由下式求出:

$$T(\tilde{P} \leftrightarrow \tilde{Q}) = T(\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}) \wedge T(\tilde{Q} \rightarrow \tilde{P})$$

模糊逻辑有以下性质。

性质 5.1

(1) 幂等律

$$T(\tilde{P} \vee \tilde{P}) = T(\tilde{P})$$

$$T(\tilde{P} \wedge \tilde{P}) = T(\tilde{P})$$

(2) 交换律

$$\begin{aligned}T(\tilde{P} \vee \tilde{Q}) &= T(\tilde{Q} \vee \tilde{P}) \\T(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) &= T(\tilde{Q} \wedge \tilde{P})\end{aligned}$$

(3) 结合律

$$\begin{aligned}T((\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \vee \tilde{R}) &= T(\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \vee \tilde{R})) \\T((\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) \wedge \tilde{R}) &= T(\tilde{P} \wedge (\tilde{Q} \wedge \tilde{R}))\end{aligned}$$

(4) 分配律

$$\begin{aligned}T(\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{R})) &= T((\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{R})) \\T(\tilde{P} \wedge (\tilde{Q} \vee \tilde{R})) &= T((\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{R}))\end{aligned}$$

(5) 吸收律

$$\begin{aligned}T(\tilde{P} \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{Q})) &= T(\tilde{P}) \\T(\tilde{P} \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{Q})) &= T(\tilde{P})\end{aligned}$$

(6) 摩根律

$$\begin{aligned}T(\overline{\tilde{P} \vee \tilde{Q}}) &= T(\overline{\tilde{P}} \wedge \overline{\tilde{Q}}) \\T(\overline{\tilde{P} \wedge \tilde{Q}}) &= T(\overline{\tilde{P}} \vee \overline{\tilde{Q}})\end{aligned}$$

(7) 双重否定律

$$T(\tilde{\tilde{P}}) = T(\tilde{P})$$

5.3 模糊逻辑推理的基本形式

5.3.1 模糊逻辑推理及其基本形式

模糊逻辑推理的基本形式是由假言推理发展而来,假言推理有两种形式:肯定前件和否定后件的假言推理形式。前者英文称 MP (Modus Ponens), 后者称 MT (Modus Tollens)。

肯定前件式:

大前提(一般规则) 若 x 是 A 则 y 是 B

小前提(特殊证据) x 是 A

结论	y 是 B
----	-----------

肯定前件式也可简记为:

$$\begin{array}{c} (A) \rightarrow (B) \\ (A) \\ \hline (B) \end{array}$$

否定后件式:

大前提(一般规则) 若 x 是 A 则 y 是 B

小前提(特殊证据) y 不是 B

结论	x 不是 A
----	------------

否定后件式可简记为：

$$\frac{(A) \rightarrow (B) \quad (\bar{B})}{(\bar{A})}$$

三段论法对小前提为 \bar{A} 和 B 的情况不能判别。这可由表 5.1 的真值表看出。

当推理所包含的概念由精确变为模糊时,这种推理形式就发展成模糊逻辑推理,这种推理是近似的,非确定的,它的前提和结论都具有模糊性。例如:

若西红柿是红的,则这个西红柿是熟的
这个西红柿有点红

即:

这个西红柿有点熟
红的 \rightarrow 熟的
有点红 \rightarrow 有点熟

本例中红的、熟的、有点熟都是模糊概念,大前提和小前提都包含模糊概念。由前提推出的结论也包含了模糊概念,有点熟。这种包含模糊概念的推理就是模糊推理,它是二值逻辑无法解决的,要借助模糊逻辑的方法。

作为传统假言推理的发展和扩充,模糊逻辑推理的基本形式,也可以有相应的肯定前件式和否定后件式,称为广义的肯定前件式 **GMP** (Generalized Modus Ponens) 和广义的否定后件式 **GMT** (Generalized Modus Tollens);

广义肯定前件式:

大前提	若 x 是 \tilde{A}	则 y 是 \tilde{B}
小前提	x 是 \tilde{A}'	
结论	y 是 \tilde{B}'	

这种形式也可简记为:

$$\frac{(A) \rightarrow (B) \quad (\tilde{A}')}{(\tilde{B}')} \quad \text{或} \quad \frac{(\tilde{A}) \rightarrow (\tilde{B}) \quad (\tilde{A}')}{(\tilde{B}')} \quad \text{或} \quad \frac{(\tilde{A}) \rightarrow (\tilde{B}) \quad (\tilde{A})}{(\tilde{B})}$$

广义否定后件式:

大前提	若 x 是 \tilde{A}	则 y 是 \tilde{B}
小前提		y 不是 \tilde{B}'
结论	x 不是 \tilde{A}'	

它也可简记为:

$$\frac{(A) \rightarrow (B) \quad (\tilde{B}')}{(\tilde{A}')} \quad \text{或} \quad \frac{(\tilde{A}) \rightarrow (\tilde{B}) \quad (\tilde{B}')}{(\tilde{A}')} \quad \text{或} \quad \frac{(\tilde{A}) \rightarrow (\tilde{B}) \quad (\tilde{B})}{(\tilde{A})}$$

在传统的假言推理中,小前提只有为 A 和 \bar{B} (分别对应肯定前件式和否定后件式),三段论法才能唯一地推出结论。而在模糊逻辑推理的情况则有所不同,小前提不限定为 \tilde{A} 和 \tilde{B} ,可以是不同于它们的 \tilde{A}' 和 \tilde{B}' ,而且还可以是其它多种情况,结论是由模糊逻辑推理

的合成规则给出(见后)。除了 \tilde{A}' , 人们还习惯用 \tilde{B}' , 而不是 $\overline{\tilde{B}}$, 这种情况, 称为肯定后件式。

肯定后件式:

大前提 若 x 是 \tilde{A} 则 y 是 \tilde{B}

小前提 y 是 \tilde{B}'

结论 x 是 \tilde{A}'

它可简记为:

$$\frac{\frac{(A) \rightarrow (B)}{(\tilde{B}')}}{(\tilde{A}')}$$

模糊推理中, 肯定前件式(GMP)是一种前向模糊匹配的推理, 将 \tilde{A}' 与 \tilde{A} 匹配以激活 $(A) \rightarrow (B)$ 表达的规则, 而后导出结论 \tilde{B}' , 它与前向数据驱动的推理相关。而否定后件式或肯定后件式则是一种后向推理, 它与后向目标驱动的推理相关。这种后向的模糊推理, 人们常统称为 GMT。

以上我们给出了模糊逻辑推理的基本形式, 但还只是逻辑结构形式, 无法用于推理计算。为了得到推理的具体的规则和公式, 我们还必须用模糊数学的方法进一步去解释去描述推理的过程。这里有以下几方面的工作:

(1) 推理形式中的大前提是由“ x 是 \tilde{A} ”、“ y 是 \tilde{B} ”这种称为模糊判断句的形式组成, 需要对它进行数学描述。

(2) 大前提是由两个模糊判断句组成的蕴涵式, 称模糊推理句, 需对它用模糊数学方法进一步描述。

(3) 对由大、小前提组成的推理过程, 用模糊数学的方法进行描述, 这就是所谓的模糊逻辑推理的合成规则。

5.3.2 模糊判断句

句型“ x^* 是 a ”简记为 (a) , 称为判断句, 这里 x^* 代表论域 X 上的任一特定元素, a 是表示概念的词。

若 a 表示清晰概念, 句型“ x^* 是 a ”称为普通判断句, 对某一 $x \in X$, “ x 是 a ”可能为真, 也可能为假, 可判别真伪, 因而是命题。若命题“ x 是 a ”为真, 判断句“ x^* 是 a ”对 x 为真。普通判断句包含清晰概念 a , 它对应一个经典集合 A :

$$A = \{x \in X \mid (a) \text{ 对 } x \text{ 为真}\}$$

A 是 X 上的集合, $A \subseteq X$ 。

显然对任一 $x \in X$, 集合 A 的特征函数就等于命题“ x 是 a ”(简记为 $a(x)$) 的真值, 即:

$$\mu_A(x) = T(a(x))$$

集合 A 是句型 (a) 的集合表示, 称为判断句 (a) 的真域。句型 (a) 的真域 A 就是论域 X 中符合概念 a 的那些元素组成的集合, 也就是概念 a 的外延。

当判断句“ x^* 是 a ”中 a 表示模糊概念时, “ x^* 是 a ”则称为模糊判断句。对某一个 $x \in$

8
7
1/2
3/4

X , 模糊判断句 (a) 不存在对 x 为真或为假的问题, 而是 (a) 对 x 为真的程度有多大的问题。“ x 是 a ”(简记为 $(a(x))$)是模糊命题, 它的真值, 记为 $T(a(x))$, 就表示判断句 (a) 对 x 为真的程度。

模糊判断句“ x 是 a ”包含一个模糊概念 a , 它对应一个模糊集合 \tilde{A} 。显然对某一 $x \in X$, 判断句 (a) 对 x 为真的程度与 x 符合模糊概念的程度 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 是一样的, 因此:

$$T(a(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x)$$

模糊判断句 (a) 的集合表示为 \tilde{A} , 称 \tilde{A} 为判断句 (a) 的真域, 它的隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 表示了 (a) 对 x 为真的程度。

5.3.3 模糊推理句

模糊逻辑推理的大前提为“若 x 是 \tilde{A} 则 y 是 \tilde{B} ”这种由两个判断句构成的蕴涵式, 这种句型称为模糊推理句。

更一般化, 句型“若 x 是 a 则 y 是 b ”称为推理句, 简记为 $(a) \rightarrow (b)$ 。

若 a 和 b 均表示清晰概念, 则为普通推理句。设 x, y 的论域分别为 X 和 Y , a 和 b 两个清晰概念分别对应经典集合 A 和 B 。对于任意一个 $(x, y) \in X \times Y$, 由命题 $(a(x))$ 、 $(b(y))$ 构成的蕴涵式 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$, 其真值由式(5.1)计算:

$$\begin{aligned} T((a(x)) \rightarrow (b(y))) &= (T(a(x)) \wedge T(b(y))) \vee (1 - T(a(x))) \\ &= (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \vee (1 - \mu_A(x)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

判断句 (a) 的真域为 $A \subseteq X$, 判断句 (b) 的真域 $B \subseteq Y$, 设 R 为推理句 $(a) \rightarrow (b)$ 的真域, 显然 R 应是直积 $X \times Y$ 的子集, 即 $R \subseteq X \times Y$, 而且 $(a) \rightarrow (b)$ 对 (x, y) 为真, 即蕴涵式 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 的真值为1, 所以:

$$R = \{(x, y) \in X \times Y | T((a(x)) \rightarrow (b(y))) = 1\} \quad (5.4)$$

由式(5.1)和真值表5.1, 不难有:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in X \times Y | (T(a(x)) \wedge T(b(y))) \vee (1 - T(a(x))) = 1\} \\ &= \{(x, y) \in X \times Y | T(a(x)) = T(b(y)) = 1\} \cup \\ &\quad \{(x, y) \in X \times Y | T(a(x)) = 0, T(b(y)) \text{ 不管}\} \\ &= \{(x, y) \in X \times Y | x \in A \text{ 且 } y \in B\} \cup \{(x, y) \in X \times Y | \\ &\quad x \in \bar{A}, y \in Y\} \\ &= (A \times B) \cup (\bar{A} \times Y) \end{aligned} \quad (5.5)$$

若用特征函数表示则有:

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \vee 1 - \mu_A(x) \quad (5.6)$$

式(5.6)也可由式(5.3)和式(5.4)直接推出。

根据关系的定义2.2, 推理句 $(a) \rightarrow (b)$ 的真域 R , 也是它的集合表示, 实际上是直积空间 $X \times Y$ 上的一个二元经典关系, 这种关系的含义就是 $(a(x))$ 到 $(b(y))$ 的蕴涵 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 。也就是说, 对于任一 $(x, y) \in X \times Y$, 若 $(x, y) \in R$, 就意味着蕴涵式 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 成立, 也就是推理句 $(a) \rightarrow (b)$ 对 (x, y) 为真。

下面我们来看模糊的情形。

若 a 和 b 均为模糊概念, 则推理句“若 x^* 是 a , 则 y^* 是 b ”, 简记为 $(a) \rightarrow (b)$, 为模糊推理句。

设模糊判断句 (a) 和 (b) 的真域分别为模糊集合 \tilde{A} 和 \tilde{B} , $\tilde{A} \in F(X)$, $\tilde{B} \in F(Y)$, 定义 $(a) \rightarrow (b)$ 的真域为模糊集合 \tilde{R} , $\tilde{R} \in F(X \times Y)$, \tilde{R} 的隶属函数 $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ 就代表了 $(a) \rightarrow (b)$ 对元素 (x, y) 为真的程度。

对任意 $(x, y) \in X \times Y$, 由模糊命题 $(a(x))$ 和 $(b(y))$ 组成的蕴涵式 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$, 其真值由式 (5.2) 计算:

$$\begin{aligned} T((a(x)) \rightarrow (b(y))) &= (T(a(x)) \wedge T(b(y))) \vee (1 - T(a(x))) \\ &= (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \end{aligned}$$

而 $T((a(x)) \rightarrow (b(y)))$ 即 $(a) \rightarrow (b)$ 对 (x, y) 为真的程度, 亦即 $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$, 故有:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \quad (5.7)$$

式 (5.7) 对应的集合形式为:

$$\tilde{R} = (\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\bar{\tilde{A}} \times Y) \quad (5.8)$$

类似于普通推理句的情况, \tilde{R} 是 X 到 Y 的一个模糊关系, 它的隶属函数就反映了模糊推理句对 $X \times Y$ 上的元素 (x, y) 为真的程度。因为 \tilde{R} 实际上反映了模糊集合 \tilde{A} 到 \tilde{B} 的模糊关系, 有时记为 $\tilde{R}(\tilde{A}; \tilde{B})$ 。如果给模糊蕴涵式 (5.2) 以不同的定义, 那么模糊关系 \tilde{R} 会有不同的形式, 式 (5.7) 和 (5.8) 会有不同的形式。

5.3.4 模糊推理的合成规则

我们对模糊逻辑推理基本形式的大、小前提都进行了集合描述。那么由大、小前提结合起来的推理过程又怎样进行数学描述呢? 下面我们介绍 Zadeh 的模糊推理合成规则。

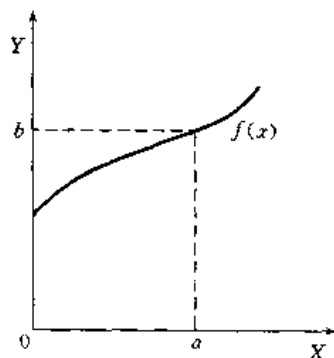


图 5.1 函数

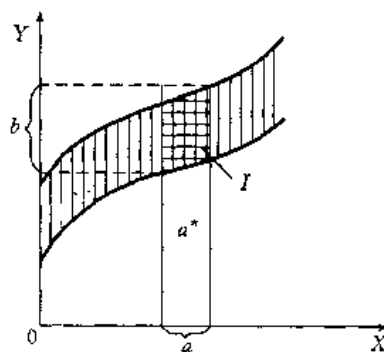


图 5.2 区间值函数

推理合成规则是下面人们熟知的函数过程的一般化。参照图 5.1, 假定我们有一条函数曲线 $y=f(x)$, 并给出 $x=a$ 。那么从 $x=a$ 和 $y=f(x)$, 我们能够推断 $y=b=f(a)$ 。 b 可以看成直线 $x=a$ 与 $f(x)$ 的交点在 Y 轴的投影。

然后, 我们把上面的过程一般化, 一般化到 a 是一个区间, 而 $f(x)$ 是图 5.2 所示的区间值函数。此时, 为找出与区间 a 对应的区间 $y=b$, 我们首先构造一个底为 a 的柱状集, a^* , 即 $a^* = a \times Y$, 找出 a 与区间值曲线的交 I , 然后把交 I 投影到 Y 轴上, 就得到所求的

y , 即区间 b 。

我们把一般化的过程再向前推进一步。假定 \tilde{A} 是 X 上的一个模糊子集, 而 \tilde{R} 是从 X 到 Y 的一个模糊关系。我们仍然构造一个底为 \tilde{A} 的柱状模糊集合 \tilde{A}^* , 使 \tilde{A}^* 与模糊关系 \tilde{R} 相交, 见图 5.3, 我们得到与图 5.2 的交集 I 类似的模糊集合 $\tilde{A}^* \cap \tilde{R}$, 然后把这个集合投影到 Y 轴上, 于是得到 Y 上的模糊子集 \tilde{B} 。

令 $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{A}^*}, \mu_{\tilde{R}}$ 和 $\mu_{\tilde{B}}$ 分别为 $\tilde{A}, \tilde{A}^*, \tilde{R}$ 和 \tilde{B} 的隶属函数, 那么根据 \tilde{A}^* 的定义, 有:

$$\tilde{A}^* = \tilde{A} \times Y = \tilde{A} \times [0, \infty]$$

可知: $\mu_{\tilde{A}^*}(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x)$

\tilde{A}^* 与 \tilde{R} 的交采用取小运算:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}^* \cap \tilde{R}}(x, y) &= \mu_{\tilde{A}^*}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x, y) \\ &= \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x, y) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$\tilde{A}^* \cap \tilde{R}$ 到 Y 轴的投影, 存在重叠现象。我们仅考虑 \tilde{A} 中隶属度不为 0 的情况即可, 假定 \tilde{A} 中有有限个隶属度不为 0 的元素, 即:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \end{aligned}$$

那么 \tilde{A}^* 可以表示为:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^* &= \tilde{A} \times Y \\ &= \bigcup_{i=1}^n (x_i \times Y) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \tilde{A}_i^* \end{aligned}$$

\tilde{A}_i^* 如图 5.3 所示。进而:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^* \cap \tilde{R} &= \left(\bigcup_{i=1}^n \tilde{A}_i^* \right) \cap \tilde{R} \\ &= \bigcup_{i=1}^n (\tilde{A}_i^* \cap \tilde{R}) \end{aligned}$$

因此, $\tilde{A}^* \cap \tilde{R}$ 到 Y 轴的投影可以看成 n 个 $\tilde{A}_i^* \cap \tilde{R}$ 到 Y 轴投影的重叠。

对每一个 $\tilde{A}_i^* \cap \tilde{R}$ 到 Y 轴的投影 \tilde{B}_i , 有:

$$\mu_{\tilde{B}_i}(y) = \mu_{\tilde{A}_i^*}(x_i, y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x_i, y) = \mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x_i, y)$$

对 n 个 $\tilde{A}_i^* \cap \tilde{R}$ 到 Y 轴的投影 \tilde{B} 是 \tilde{B}_i 的并, 即:

$$\tilde{B} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{B}_i$$

因而:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(y) &= \bigvee_{i=1}^n \mu_{\tilde{B}_i}(y) \\ &= \bigvee_{i=1}^n (\mu_{\tilde{A}}(x_i) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x_i, y)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

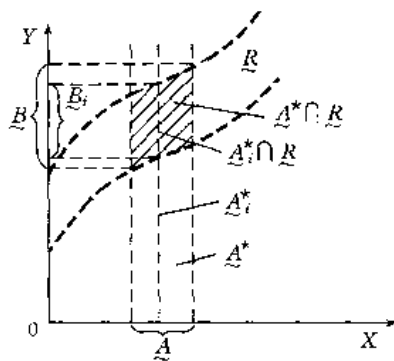


图 5.3 模糊推理合成规则

对于更一般的情况,有:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{B}}(y) &= \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{R}}(x, y)) \\ \forall y \in Y\end{aligned}\quad (5.11)$$

在以上推导中,模糊集的并采用了取大运算。

式(5.11)即 \tilde{B} 的隶属函数表达式,也就是由模糊集合 \tilde{A} , 模糊关系 \tilde{R} (可以看成是一个广义的函数变换 $f(\tilde{A})$) 求 \tilde{B} 的算法,我们称为合成规则,记为:

$$\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R} \quad (5.12)$$

当 \tilde{A}, \tilde{R} 均为有限离散点论域上的模糊集时,上述运算简化为模糊矩阵的“ $\vee - \wedge$ ”运算。

例 5.1 设:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= 0.2/a_1 + 0.8/a_2 \\ \tilde{R} &= 0.8/(a_1, b_1) + 0.9/(a_1, b_2) + 0.2/(a_1, b_3) \\ &\quad + 0.6/(a_2, b_1) + 0.1/(a_2, b_2) + 1/(a_2, b_3)\end{aligned}$$

求 $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$

解: 写成矩阵形式:

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \tilde{A} \circ \tilde{R} = (0.2 \quad 0.8) \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (0.6 \quad 0.2 \quad 0.8) \\ &= 0.6/b_1 + 0.2/b_2 + 0.8/b_3\end{aligned}$$

需要指出的是,在上述推导过程模糊集合的交并运算分别采用了取小、取大运算。我们在 1.8 节中曾经讨论了交、并运算的其它算子,它们也可以运用于模糊推理合成规则的算法之中。

5.3.5 模糊逻辑推理基本形式的算法

给出了判断句,推理句的集合描述及模糊推理的合成规则,我们就可以进一步给出模糊逻辑推理基本形式的算法。

对于模糊逻辑推理基本形式的肯定前件式即:

$$\frac{\begin{array}{c} (A) \rightarrow (B) \\ (\tilde{A}') \end{array}}{(\tilde{B}')} \quad (B')$$

对于小前提所包含的模糊概念,它对应的模糊集合记为 \tilde{A}' , 大前提中的模糊判断句 $(A) \rightarrow (B)$ 分别对应的模糊集记为 \tilde{A} 和 \tilde{B} , 而模糊推理句 $(A) \rightarrow (B)$ 对应的模糊关系用 \tilde{R} 表示,其中 $\tilde{A}, \tilde{A}' \in F(X), \tilde{B} \in F(Y), \tilde{R} \in F(X \times Y)$ 。显然,对于肯定前件式有:

$$\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ \tilde{R} \in F(Y) \quad (5.13)$$

而对于肯定后件式,即:

$$\frac{\begin{array}{c} (A) \rightarrow (B) \\ (\tilde{B}') \end{array}}{(\tilde{A}')} \quad (A')$$

由此我们尚不能直接得到 \tilde{A}' 。为了求得 \tilde{A}' , 设:

$$\frac{(\tilde{B}^*) \rightarrow (\tilde{A}^*)}{(\tilde{B}')} \quad (\tilde{A}')$$

$(\tilde{B}^*) \rightarrow (\tilde{A}^*)$ 对应的模糊关系为 \tilde{R}^* , $\tilde{R}^* \in F(Y \times X)$, 即 Y 到 X 的模糊关系, 此时显然有:

$$\tilde{A}' = \tilde{B}' \circ \tilde{R}^*$$

当 $(\tilde{A}^*) = (\tilde{A})$ 且有 $(\tilde{B}^*) = (\tilde{B})$, 即存在 $(\tilde{B}) \rightarrow (\tilde{A})$, 因为又有 $(\tilde{A}) \rightarrow (\tilde{B})$, 因此 (\tilde{A}) 、 (\tilde{B}) 两个句子互蕴涵, 那么:

$$\tilde{R}^* = \tilde{R}^{-1}$$

于是有:

$$\tilde{A}' = \tilde{B}' \circ \tilde{R}^{-1} \quad (5.14)$$

式(5.14)即肯定后件式的公式, 但应满足 $(\tilde{A}) \leftrightarrow (\tilde{B})$ 的条件。

式(5.13)和式(5.14)就是对应于肯定前件式和肯定后件式的用模糊集合的运算表示的模糊推理基本形式的逻辑结构, 它们还没有最终给出推理算法。推理的算法的推导还与下面两种因素有关: 一是 \tilde{R} 的求法, 二是合成算法的定义。

X 到 Y 的模糊关系 \tilde{R} 的求法直接由模糊蕴涵的定义得来, 不同的模糊蕴涵的定义将给出 \tilde{R} 的不同形式。合成算法采用不同模糊集合的交、并运算的运算算子, 也将得到不同的运算结果。

本节先给出一般资料经常引用的几种推理算法, 然后在下一节讨论不同模糊蕴涵定义时的情形。

1. Zadeh 的模糊推理算法

Zadeh 定义的表示模糊逻辑推理基本形式的大前提的模糊关系 \tilde{R} 有两种形式, 分别记为 \tilde{R}_m 和 \tilde{R}_a 。令 \tilde{A}, \tilde{B} 分别是 X, Y 中的模糊集合:

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x, \quad \tilde{B} = \int_Y \mu_{\tilde{B}}(y)/y$$

$x \in X, y \in Y$ 。 $\times, \cup, \cap, -, \oplus$ 分别表示模糊集合的笛卡尔积、并、交、补和有界和。由“若 x 是 \tilde{A} 则 y 是 \tilde{B} ”的推理句, Zadeh 定义的 $X \times Y$ 的模糊关系 \tilde{R}_m 和 \tilde{R}_a 分别为:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_m &= (\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\bar{\tilde{A}} \times Y) \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_a &= (\bar{\tilde{A}} \times Y) \oplus (X \times \tilde{B}) \\ &= \int_{X \times Y} 1 \wedge (1 - \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(y)) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.16)$$

\tilde{R}_a 很容易由 1.8 节的有界和算子的定义中推出。

由上两式, 肯定前件式的结论可由推理合成规则(式 5.13)得出:

$$\begin{aligned} \tilde{B}'_m &= \tilde{A}' \circ \tilde{R}_m \\ &= \tilde{A}' \circ ((\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\bar{\tilde{A}} \times Y)) \end{aligned}$$

$$= \int_Y \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}'}(x) \wedge ((\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)))) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}'_a &= \tilde{A}' \circ \tilde{R}_a \\ &= \tilde{A}' \circ ((\bar{\tilde{A}} \times Y) \oplus (X \times \tilde{B})) \\ &= \int_Y \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}'}(x) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(y)))) \end{aligned} \quad (5.18)$$

对于肯定后件式,则 \tilde{A}'_m 和 \tilde{A}'_a 由(5.14)式求出。对式(5.14)作求逆运算。对于由“ $\vee - \wedge$ ”运算定义的合成运算,由第二章性质 2.2 给出的合成运算求逆的性质,有:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}')^{-1} &= (\tilde{B}' \circ \tilde{R}^{-1})^{-1} = (\tilde{R}^{-1})^{-1} \circ (\tilde{B}')^{-1} \\ &= \tilde{R} \circ (\tilde{B}')^{-1} \end{aligned}$$

考虑到模糊关系的逆的矩阵就是原模糊关系矩阵的转置,因此:

$$(\tilde{A}')^T = \tilde{R} \circ (\tilde{B}')^T$$

如果用模糊向量的形式表示 \tilde{A}', \tilde{B}' ,那么它们的转置就为列向量的形式。这也可由它们相应矩阵的维数看出,对于肯定前件式和肯定后件式,分别有:

$$\begin{aligned} \tilde{B}'_{1 \times n} &= \tilde{A}'_{1 \times m} \circ \tilde{R}_{m \times n} \\ (\tilde{A}')_{m \times 1}^T &= \tilde{R}_{m \times n} \circ (\tilde{B}')_{n \times 1}^T \end{aligned}$$

由于我们在本小节开头规定用下述形式表示模糊集合:

$$\tilde{A}' = \int_X \mu_{\tilde{A}'}(x)/x, \quad \tilde{B}' = \int_Y \mu_{\tilde{B}'}(y)/y$$

因此它们转置的表示和本身之间不再有区别,于是有:

$$\tilde{A}' = \tilde{R} \circ \tilde{B}' \quad (5.19)$$

由式(5.19)我们容易得出肯定后件式的模糊逻辑推理基本形式的算法:

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_m &= \tilde{R}_m \circ \tilde{B}' \\ &= ((\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (1 - \bar{\tilde{A}})) \circ \tilde{B}' \\ &= \int_{x, y \in Y} \bigvee ((\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee (1 - \mu_{\tilde{A}}(x))) \wedge \mu_{\tilde{B}'}(y))/x \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_a &= \tilde{R}_a \circ \tilde{B}' \\ &= ((\bar{\tilde{A}} \times Y) \oplus (X \times \tilde{B})) \circ \tilde{B}' \\ &= \int_{x, y \in Y} ((1 \wedge (1 - \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(y))) \wedge \mu_{\tilde{B}'}(y))/x \end{aligned} \quad (5.21)$$

以上式(5.17), (5.20)和式(5.18), (5.21)就是 Zadeh 给出的两种蕴涵定义下的两种模糊逻辑推理基本形式的推理算法。

2. Mamdani 的模糊推理算法

Mamdani 是英国学者,他首先把模糊数学的方法应用于自动控制领域,设计了模糊逻辑控制器 FLC(Fuzzy Logical Controller)。

Mamdani 提出一个称为最小运算规则的运算来定义模糊逻辑推理的大前提所表达的 X 到 Y 的模糊关系,记为 \tilde{R}_c, \tilde{R}_c 定义为:

$$\tilde{R}_c = \tilde{A} \times \tilde{B}$$

$$= \int_{X \times Y} \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) / (x, y) \quad (5.22)$$

对于肯定前件式, 结论 \tilde{B}' 可由下式求得:

$$\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ \tilde{R}_c$$

其中合成运算“ \circ ”可以取“ $\vee - \wedge$ ”, “ $\vee - \odot$ ”(即取大——有界积)、“ $\vee - \cap$ ”(即取大——强化积)等运算。当合成运算取“ $\vee - \wedge$ ”运算时, 有:

$$\begin{aligned} \tilde{B}' &= \tilde{A}' \circ \tilde{R}_c \\ &= \int_Y \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}'}(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y))) / y \end{aligned} \quad (5.23)$$

对于肯定后件式, 采用“ $\vee - \wedge$ ”合成规则 Mamdani 的推理算法为:

$$\begin{aligned} \tilde{A}' &= \tilde{R}_c \circ \tilde{B}' \\ &= \int_X \bigvee_{y \in Y} ((\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) \wedge \mu_{\tilde{B}'}(y)) / x \end{aligned} \quad (5.24)$$

Mamdani 的推理算法式(5.23)是 FLC 设计中经常采用的方法。

3. Larsen 的模糊推理算法

Larsen 用乘积运算作为模糊蕴涵的规则, 由此来构造模糊推理的大前提所表达的 X 到 Y 的模糊关系, 记为 \tilde{R}_p 。 \tilde{R}_p 定义为:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_p &= \tilde{A} \times \tilde{B} \\ &= \int_{X \times Y} \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.25)$$

对于肯定前件式, 结论 \tilde{B}'_p 可由下式求得:

$$\begin{aligned} \tilde{B}'_p &= \tilde{A}' \circ \tilde{R}_p \\ &= \int_Y \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}'}(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y))) / y \end{aligned} \quad (5.26)$$

对于肯定后件式, 结论 \tilde{A}'_p 则由下式求出。

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_p &= \tilde{R}_p \circ \tilde{B}' \\ &= \int_X \bigvee_{y \in Y} ((\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y)) \wedge \mu_{\tilde{B}'}(y)) / x \end{aligned} \quad (5.27)$$

以上式(5.26)和(5.27)均是采用“ $\vee - \wedge$ ”合成运算规则。

4. Mizumoto 模糊推理算法

Mizumoto 等人依据各种不同的模糊蕴涵规则, 提出一组构造模糊关系的方法, 这些模糊关系分别记为 $\tilde{R}_i, \tilde{R}_s, \tilde{R}_{sg}, \tilde{R}_{gg}, \tilde{R}_{gs}, \tilde{R}_{ss}, \tilde{R}_b, \tilde{R}_\Delta, \tilde{R}_\blacktriangle, \tilde{R}_\bullet, \tilde{R}_\circ, \tilde{R}_\square$, 其定义罗列如下:

$$\tilde{R}_i = \tilde{A} \times Y \rightarrow X \times \tilde{B} = \int_{X \times Y} (\mu_{\tilde{A}}(x) \rightarrow \mu_{\tilde{B}}(y)) / (x, y) \quad (5.28)$$

其中:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \rightarrow \mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} 1, & \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(y) \\ 0, & \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(y) \end{cases}$$

$$\tilde{R}_s = \tilde{A} \times Y \rightarrow_s X \times \tilde{B} = \int_{X \times Y} (\mu_{\tilde{A}}(x) \rightarrow_s \mu_{\tilde{B}}(y)) / (x, y) \quad (5.29)$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{g}} \mu_{\underline{B}}(y) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(y) \\ \mu_{\underline{B}}(y), & \mu_{\underline{A}}(x) > \mu_{\underline{B}}(y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{g}} &= (\underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{g}} X \times \underline{B}) \cap (\bar{\underline{A}} \times Y \rightarrow_{\underline{g}} X \times \bar{\underline{B}}) \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{g}} \mu_{\underline{B}}(y)) \wedge ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \rightarrow_{\underline{g}} (1 - \mu_{\underline{B}}(y))) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{gg}} &= (\underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{g}} X \times \underline{B}) \cap (\bar{\underline{A}} \times Y \rightarrow_{\underline{g}} X \times \bar{\underline{B}}) \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{g}} \mu_{\underline{B}}(y)) \wedge ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \rightarrow_{\underline{g}} (1 - \mu_{\underline{B}}(y))) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{g}'} &= (\underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{g}'} X \times \underline{B}) \cap (\bar{\underline{A}} \times Y \rightarrow_{\underline{g}'} X \times \bar{\underline{B}}) \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{g}'} \mu_{\underline{B}}(y)) \wedge ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \rightarrow_{\underline{g}'} (1 - \mu_{\underline{B}}(y))) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{u}} &= (\underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{u}} X \times \underline{B}) \cap (\bar{\underline{A}} \times Y \rightarrow_{\underline{u}} X \times \bar{\underline{B}}) \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{u}} \mu_{\underline{B}}(y)) \wedge ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \rightarrow_{\underline{u}} (1 - \mu_{\underline{B}}(y))) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{b}} &= (\bar{\underline{A}} \times Y) \cup (X \times \underline{B}) \\ &= \int_{X \times Y} (1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \vee \mu_{\underline{B}}(y) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{\Delta}} &= \underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{\Delta}} X \times \underline{B} \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{\Delta}} \mu_{\underline{B}}(y)) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.35)$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{\Delta}} \mu_{\underline{B}}(y) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(y) \\ \mu_{\underline{B}}(y) / \mu_{\underline{A}}(x), & \mu_{\underline{A}}(x) > \mu_{\underline{B}}(y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{\Delta}} &= \underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{\Delta}} X \times \underline{B} \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{\Delta}} \mu_{\underline{B}}(y)) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.36)$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{\Delta}} \mu_{\underline{B}}(y) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underline{A}}(x) = 0 \text{ 或 } 1 - \mu_{\underline{B}}(y) = 0 \\ 1 \wedge \frac{\mu_{\underline{B}}(y)}{\mu_{\underline{A}}(x)} \wedge \frac{1 - \mu_{\underline{A}}(x)}{1 - \mu_{\underline{B}}(y)}, & \mu_{\underline{A}}(x) > 0 \text{ 且 } 1 - \mu_{\underline{B}}(y) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_{\underline{*}} &= \underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{*}} X \times \underline{B} \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{*}} \mu_{\underline{B}}(y)) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.37)$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\underline{*}} \mu_{\underline{B}}(y) = 1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{A}}(x) \mu_{\underline{B}}(y)$$

$$R_{\underline{\#}} = \underline{A} \times Y \rightarrow_{\underline{\#}} X \times \underline{B}$$

$$= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\#} \mu_{\underline{B}}(y)) / (x, y) \quad (5.38)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\#} \mu_{\underline{B}}(y) &= (\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)) \vee ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \\ &\quad \wedge (1 - \mu_{\underline{B}}(y))) \vee (\mu_{\underline{B}}(y) \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x))) \\ &= ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \vee \mu_{\underline{B}}(y)) \wedge (\mu_{\underline{A}}(x) \\ &\quad \vee (1 - \mu_{\underline{B}}(y))) \wedge (\mu_{\underline{B}}(y) \vee (1 - \mu_{\underline{B}}(y))) \\ R_{\square} &= \underline{A} \times Y \rightarrow_{\square} X \times \underline{B} \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\square} \mu_{\underline{B}}(y)) / (x, y) \end{aligned} \quad (5.39)$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow_{\square} \mu_{\underline{B}}(y) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underline{A}}(x) < 1 \text{ 或 } \mu_{\underline{B}}(y) = 1 \\ 0, & \mu_{\underline{A}}(x) = 1 \text{ 且 } \mu_{\underline{B}}(y) < 1 \end{cases}$$

上述规则均是根据多值逻辑(或狭义模糊逻辑)的蕴涵规则引申来的。它们对应的蕴涵规则分别为:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_s: \quad a \rightarrow_s b &= \begin{cases} 1, & a \leq b \\ 0, & a > b \end{cases} \\ \tilde{R}_g: \quad a \rightarrow_g b &= \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases} \\ \tilde{R}_{sg}: \quad a \rightarrow_{sg} b &= (a \rightarrow_s b) \wedge ((1-a) \rightarrow_g (1-b)) \\ \tilde{R}_{gg}: \quad a \rightarrow_{gg} b &= (a \rightarrow_g b) \wedge ((1-a) \rightarrow_g (1-b)) \\ \tilde{R}_{gs}: \quad a \rightarrow_{gs} b &= (a \rightarrow_g b) \wedge ((1-a) \rightarrow_s (1-b)) \\ \tilde{R}_{ss}: \quad a \rightarrow_{ss} b &= (a \rightarrow_s b) \wedge ((1-a) \rightarrow_s (1-b)) \\ \tilde{R}_b: \quad a \rightarrow_b b &= (1-a) \vee b \\ \tilde{R}_{\Delta}: \quad a \rightarrow_{\Delta} b &= \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b/a, & a > b \end{cases} \\ \tilde{R}_{\blacktriangle}: \quad a \rightarrow_{\blacktriangle} b &= \begin{cases} 1 \wedge b/a \wedge (1-a)/(1-b), & a > 0 \text{ 且 } (1-b) > 0 \\ 1, & a = 0 \text{ 或 } (1-b) = 0 \end{cases} \\ \tilde{R}_+: \quad a \rightarrow_+ b &= 1 - a + ab \\ \tilde{R}_{\#}: \quad a \rightarrow_{\#} b &= ((1-a) \vee (b)) \wedge (a \vee (1-a)) \wedge (b \vee (1-b)) \\ &= (a \wedge b) \vee ((1-a) \wedge (1-b)) \vee (b \wedge (1-a)) \\ \tilde{R}_{\square}: \quad a \rightarrow_{\square} b &= \begin{cases} 1, & a < 1 \text{ 或 } b = 1 \\ 0, & a = 1 \text{ 且 } b < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

有了上述模糊关系即式(5.28)——式(5.39)后,就可以得到模糊推理的算法,对于肯定前件式,采用“ $\vee - \wedge$ ”合成运算规则,有:

$$\begin{aligned} \tilde{B}' &= \tilde{A}' \circ \tilde{R}_s \\ &= \tilde{A}' \circ (\underline{A} \times Y \rightarrow_s X \times \underline{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_Y \bigvee_{x \in X} (\mu_{\underline{A}'}(x) \wedge (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y))) / y \\
&= \int_Y \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(y)} \mu_{\underline{A}'}(x) / y
\end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}'_g &= \tilde{A}' \circ \tilde{R}_g \\
&= \tilde{A}' \circ (\tilde{A} \times Y \rightarrow X \times \tilde{B}) \\
&= \int_Y \bigvee_{x \in X} (\mu_{\underline{A}'}(x) \wedge (\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y))) / y \\
&= \int_Y \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(y)} \mu_{\underline{A}'}(x), \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x) > \mu_{\underline{B}}(y)} (\mu_{\underline{A}'}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)) / y
\end{aligned} \quad (5.41)$$

对于肯定后件式的模糊逻辑推理,采用“ $\vee - \wedge$ ”合成运算规则有:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}'_s &= \tilde{R}_s \circ \tilde{B}' \\
&= (\tilde{A} \times Y \Rightarrow X \times \tilde{B}) \circ \tilde{B}' \\
&= \int_X \bigvee_{y \in Y} ((\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y)) \wedge \mu_{\underline{B}'}(y)) / x \\
&= \int_X \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(y)} \mu_{\underline{B}'}(y) / x
\end{aligned} \quad (5.42)$$

同样有:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}'_g &= \tilde{R}_g \circ \tilde{B}' \\
&= (\tilde{A} \times Y \Rightarrow X \times \tilde{B}) \circ \tilde{B}' \\
&= \int_X \bigvee_{y \in Y} ((\mu_{\underline{A}}(x) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y)) \wedge \mu_{\underline{B}'}(y)) / x \\
&= \int_X \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(y)} \mu_{\underline{B}'}(y), \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x) > \mu_{\underline{B}}(y)} (\mu_{\underline{B}}(y) \wedge \mu_{\underline{B}'}(y)) / x
\end{aligned} \quad (5.43)$$

对于其它几种模糊关系的定义,即 $\tilde{R}_{gg}, \tilde{R}_{gs}, \tilde{R}_{ss}, \tilde{R}_{bs}, \tilde{R}_{\Delta}, \tilde{R}_{\Delta}, \tilde{R}_{\Delta}, \tilde{R}_{\Delta}, \tilde{R}_{\Delta}$ 和 \tilde{R}_{\square} 同样可以得到其相应的模糊推理的算法公式,此处就不再一一列出,读者可自行推导。

作为对各种模糊蕴涵 $(\tilde{A}) \rightarrow (\tilde{B})$ 表示的模糊关系 \tilde{R} 的一个直观描述,下面将 $\tilde{R}_m, \tilde{R}_a, \tilde{R}_c, \tilde{R}_p, \tilde{R}_i, \tilde{R}_g$ 分别用图形表示,绘于图 5.4 中,图中用 $\mu_{\underline{A}}$ 和 $\mu_{\underline{B}}$ 分别表示 $\mu_{\underline{A}}(x)$ 和 $\mu_{\underline{B}}(y)$,左侧图横坐标为 $\mu_{\underline{A}}$,纵坐标即 $\mu_{\underline{R}}(x, y)$,不同的 $\mu_{\underline{B}}$ 用参数区分。这种坐标便于分析肯定前件式的推理。而右侧图则使用带有参数 $\mu_{\underline{A}}$ 的坐标平面,横坐标为 $\mu_{\underline{B}}$,纵坐标为 $\mu_{\underline{R}}$,它则便于分析肯定后件式的推理。

表示模糊逻辑推理基本形式大前提的模糊关系 \tilde{R} 有如此多的定义,再加上推理合成规则又有多种运算形式,那么组合起来就可以得到很多种模糊推理的算法。人们不禁要问,这些算法究竟哪个优哪个劣? 实际应用中如何选择? 这个问题的确是一个重要问题,又是一个很难回答的问题。应该说在不同的应用领域,人们都已经积累了一定的成功的应用经验,采用前人成功的推理方式是人们实际应用中一个经常的选择,这种选择虽然不一定是最优的,但肯定是可行的。本书主要讨论的应用领域——模糊控制中,人们经常采用的推理方式就是模糊控制的创始人 Mamdani 采用的而又被后来很多成功的应用证明是

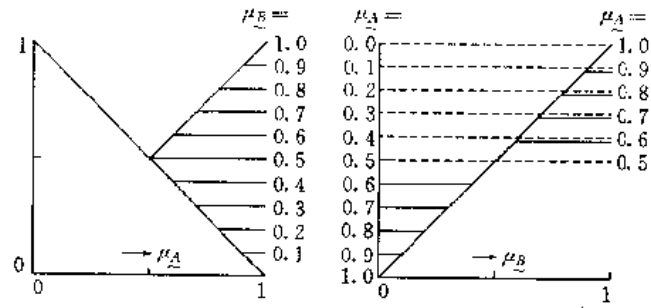


图 5.4 (a) $R_m: (\mu_A \wedge \mu_B) \vee (1 - \mu_A)$

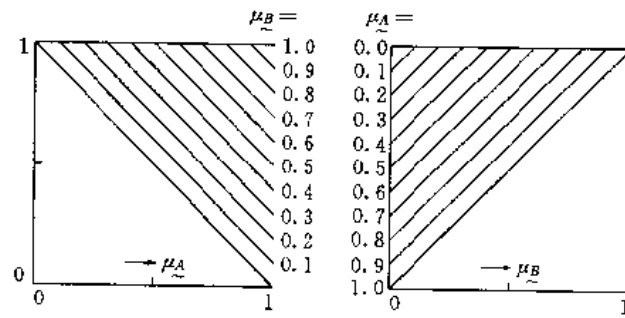


图 5.4 (b) $R_a: 1 \wedge (1 - \mu_A + \mu_B)$

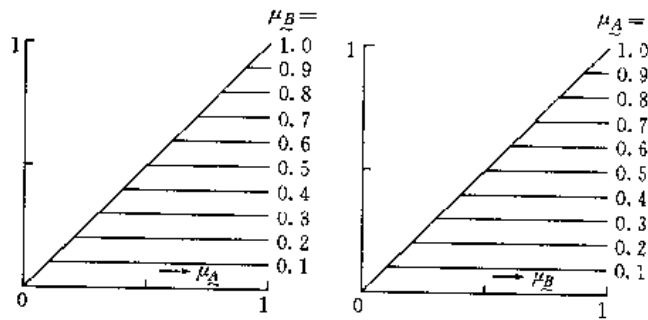


图 5.4 (c) $R_c: \mu_A \wedge \mu_B$

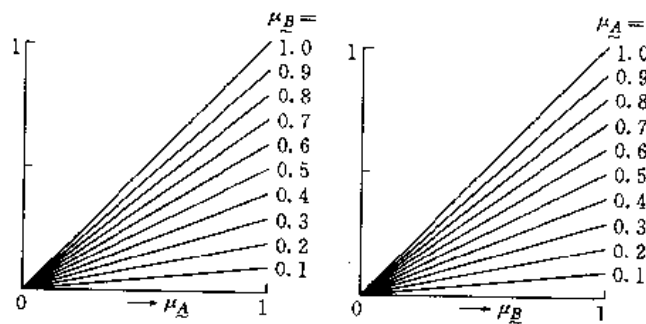


图 5.4 (d) $R_p: \mu_A \cdot \mu_B$

理的结果是否符合表 5.4 和表 5.5 所列出的直觉判断准则呢?下面以 R_p 为例给出推导过程和推导结果,其它情况仅给出推导结果。

表 5.4 直觉准则(GMP)

	x is \tilde{A}' (小前提)	y is \tilde{B}' (结论)
Relation I	x is \tilde{A}	y is \tilde{B}
Relation I-1	x is very \tilde{A}	y is very \tilde{B}
Relation I-2	x is very \tilde{A}	y is \tilde{B}
Relation II-1	x is more or less \tilde{A}	y is more or less \tilde{B}
Relation II-2	x is more or less \tilde{A}	y is \tilde{B}
Relation IV-1	x is not \tilde{A}	y is unknown
Relation IV-2	x is not \tilde{A}	y is not \tilde{B}

表 5.5 直觉准则(GMT)

	y is \tilde{B}' (小前提)	x is \tilde{A}' (结论)
Relation V	y is not \tilde{B}	x is not \tilde{A}
Relation VI	y is not very \tilde{B}	x is not very \tilde{A}
Relation VII	y is not more or less \tilde{B}	x is not more or less \tilde{A}
Relation VII-1	y is \tilde{B}	x is unknown
Relation VII-2	y is \tilde{B}	x is \tilde{A}

对于 GMP,有:

$$\tilde{B}'_p = \tilde{A}' \circ R_p$$

其中:合成规则采用“ $\vee - \wedge$ ”运算。

\tilde{A}' 有下述几种形式:

$$\tilde{A} = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

$$\text{very } \tilde{A} = \tilde{A}^2 = \int_x \mu_{\tilde{A}}^2(x)/x$$

$$\text{more or less } \tilde{A} = \tilde{A}^{0.5} = \int_x \mu_{\tilde{A}}^{0.5}(x)/x$$

$$\text{not } \tilde{A} = \bar{\tilde{A}} = \int_x 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

对于 GMT,有:

$$\tilde{A}'_p = R_p \circ \tilde{B}'$$

其中:合成规则采用“ $\vee - \wedge$ ”运算。

\tilde{B}' 有下述几种形式:

$$\text{not } \tilde{B} = \tilde{\bar{B}} = \int_Y 1 - \mu_{\tilde{B}}(y)/y$$

$$\text{not very } \tilde{B} = \int_Y 1 - \mu_{\tilde{B}}^2(y)/y$$

$$\text{not more or less } \tilde{B} = \int_Y 1 - \mu_{\tilde{B}}^{0.5}(y)/y$$

$$\tilde{B} = \int_Y \mu_{\tilde{B}}(y)/y$$

Larsen 的乘积运算规则 R_p 为:

$$R_p = \int_{X \times Y} \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y) / (x, y)$$

R_p 的直观的图形表示我们已绘于图 5.4(d) 中。

于是, 对于 GMP 情况:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_p &= \tilde{A}' \circ R_p \\ &= \int_X \mu_{\tilde{A}'}(x) / x \circ \int_{X \times Y} \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y) / (x, y) \end{aligned}$$

$$\mu_{\tilde{B}_p}(y) = \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}'}(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y)))$$

对于 \tilde{A}' 的几种取值, 我们用 $\mu_{\tilde{A}}^a(x)$ 来统一表示 $\mu_{\tilde{A}'}(x)$, 并设:

$$S_p(\mu_{\tilde{A}}^a) = \mu_{\tilde{A}}^a(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y))$$

那么:

$$\mu_{\tilde{B}_p}(y) = \bigvee_{x \in X} S_p(\mu_{\tilde{A}}^a)$$

(1) $\tilde{A}' = \tilde{A}$ 的情况 如图 5.5(a) 所示。图中画出了 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 及当参数 $\mu_{\tilde{B}}(y) = 0.3, 0.5, 0.8, 1.0$ 时的 $S_p(\mu_{\tilde{A}})$ 随横坐标 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 变化的情况。当 $\mu_{\tilde{B}}(y) = 1.0$ 时, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 与 $S_p(\mu_{\tilde{A}})$ 重合。不难看出, 对于参数 $\mu_{\tilde{B}}(y)$ 的各种情况, 均有当 $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ 时, $S_p(\mu_{\tilde{A}})$ 取最大值, 最大值等于 $(1 \cdot \mu_{\tilde{B}}(y)) = \mu_{\tilde{B}}(y)$, 即:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}_p}(y) &= \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y))) \\ &= \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y)) \\ &= \mu_{\tilde{B}}(y), (\text{当 } \mu_{\tilde{A}}(x) = 1) \end{aligned}$$

(2) $\tilde{A}' = \tilde{A}^2$ 的情况 如图 5.5(b) 所示。图中给出了 $\mu_{\tilde{A}'}(x) = \mu_{\tilde{A}}^2(x)$ 及参数 $\mu_{\tilde{B}}(y) = 0.3, 0.5, 0.8, 1.0$ 时的 $S_p(\mu_{\tilde{A}}^2)$, 当 $\mu_{\tilde{B}}(y) = 1$ 时 $S_p(\mu_{\tilde{A}}^2)$ 与 $\mu_{\tilde{A}}^2(x)$ 重合。同样, 当 $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ 时, $S_p(\mu_{\tilde{A}}^2)$ 取最大值, 最大值等于 $(1 \cdot \mu_{\tilde{B}}(y)) = \mu_{\tilde{B}}(y)$, 即:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}_p}(y) &= \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}^2(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y))) \\ &= \mu_{\tilde{B}}(y), (\text{当 } \mu_{\tilde{A}}(x) = 1) \end{aligned}$$

(3) $\tilde{A}' = \tilde{A}^{0.5}$ 的情况 见图 5.5(c)。有:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}_p}(y) &= \bigvee_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}^{0.5}(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(y))) \\ &= \mu_{\tilde{B}}(y), (\text{当 } \mu_{\tilde{A}}(x) = 1) \end{aligned}$$

(4) $\tilde{A}' = \tilde{\bar{A}}$ 的情况 如图 5.5(d) 所示。此时 $S_p(1 - \mu_{\tilde{A}})$ 在各种参数 $\mu_{\tilde{B}}(y)$ 的情况下

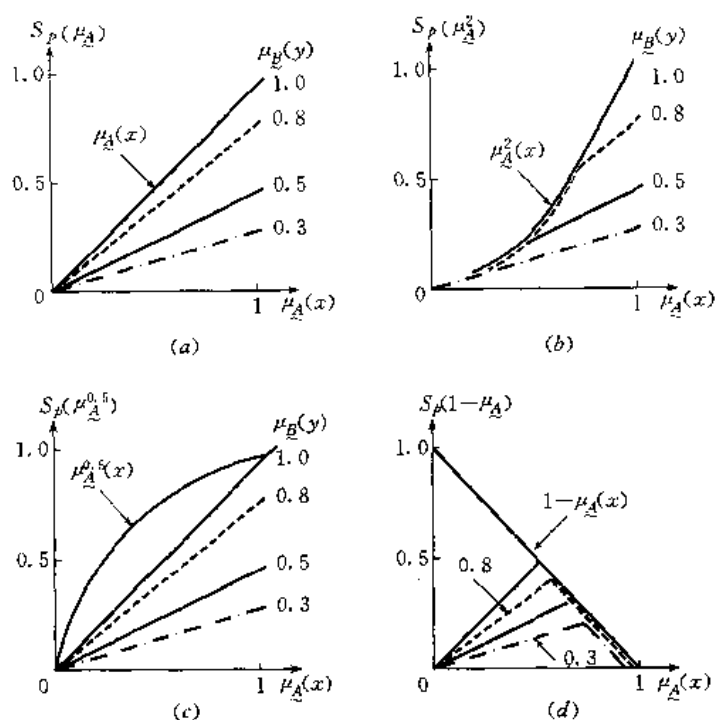


图 5.5 用 Larsen 乘积合成运算进行模糊推理(GMP)

均为折线形状,折线的拐点即直线 $\mu_{B'}(y) = 1 - \mu_B(y)$ 与直线 $\mu_{R_p}(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$ 的交点处 $S_p(1 - \mu_B)$ 取最大值,拐点满足:

$$1 - \mu_A(x) = \mu_A(x)\mu_B(y)$$

即:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \mu_B(y)}$$

那么这些拐点的值为:

$$\begin{aligned} S_p(1 - \mu_A) &= 1 - \mu_A(x) = \mu_A(x)\mu_B(y) \\ &= \frac{\mu_B(y)}{1 + \mu_B(y)} \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \bigvee_{x \in X} (\mu_A^{0.5}(x) \wedge (\mu_A(x)\mu_B(y))) \\ &= \frac{\mu_B(y)}{1 + \mu_B(y)} \end{aligned}$$

对于 GMT 的情况,有:

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_p &= \tilde{R}_p \circ \tilde{B}' \\ &= \int_{X \times Y} \mu_A(x)\mu_B(y)/(x, y) \circ \int_Y \mu_{B'}(y)/y \\ \mu_{\tilde{A}'_p}(x) &= \bigvee_{y \in Y} ((\mu_A(x)\mu_B(y) \wedge \mu_{B'}(y))) \end{aligned}$$

对于 B' 的几种取值,我们用 $1 - \mu_B^a(y)$ 来统一表示 $\mu_{B'}(y)$, 并设:

$$S_T(1 - \mu_B^a) = (\mu_A(x) \mu_B(y)) \wedge (1 - \mu_B^a(y))$$

于是:

$$\mu_{A'}(x) = \bigvee_{y \in Y} S_T(1 - \mu_B^a)$$

(1) $B' = \bar{B}$ 的情况 见图 5.6(a)。图以 $\mu_B(y)$ 为横坐标, 图中绘出了带有参数 $\mu_A(x) = 0.3, 0.5, 0.8, 1.0$ 的变量 $S_T(1 - \mu_B)$ 随 $\mu_B(y)$ 变化的情况并绘有 $\mu_{B'}(y) = 1 - \mu_B(y)$ 的曲线, $S_T(1 - \mu_B)$ 的形状均为折线, 折线的拐点即 $S_T(1 - \mu_B)$ 的最大值, 它们满足:

$$1 - \mu_B(y) = \mu_A(x) \mu_B(y)$$

即:

$$\mu_B(y) = \frac{1}{1 + \mu_A(x)}$$

那么这些拐点的值为:

$$S_T(1 - \mu_B) = 1 - \mu_B(y) = \mu_A(x) \mu_B(y)$$

$$= \frac{\mu_A(x)}{1 + \mu_A(x)}$$

于是:

$$\mu_{A'}(x) = \bigvee_{y \in Y} ((\mu_A(x) \mu_B(y)) \wedge (1 - \mu_B(y)))$$

$$= \frac{\mu_A(x)}{1 + \mu_A(x)}$$

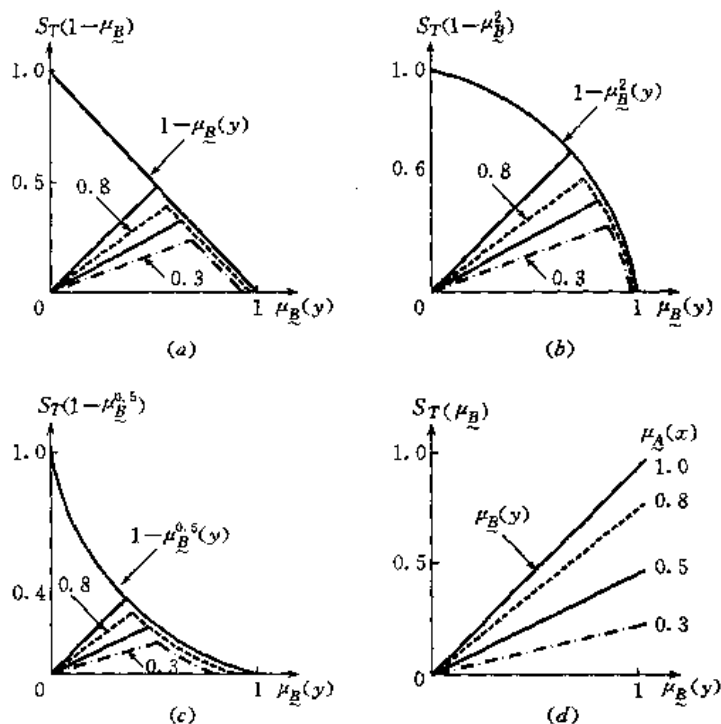


图 5.6 用 Larsen 乘积合成运算进行模糊推理(GMT)

(2) $B' = \text{not } B^2$ 的情况 如图 5.6(b)所示。在各种参数 $\mu_A(x)$ 下, $S_T(1 - \mu_B^2)$ 的最大

22
22
22
22

值均在曲线 $\mu_{\underline{B}}(y)=1-\mu_{\underline{B}}^2(y)$ 和 $\mu_{\underline{R}_p}(x,y)=\mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y)$ 的交点处,这些交点满足:

$$1 - \mu_{\underline{B}}^2(y) = \mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y)$$

解方程得:

$$\mu_{\underline{B}}(y) = \frac{\sqrt{\mu_{\underline{A}}^2(x) + 4} - \mu_{\underline{A}}(x)}{2}$$

交点处有:

$$S_T(1 - \mu_{\underline{B}}^2) = \frac{\mu_{\underline{A}}(x) \sqrt{\mu_{\underline{A}}^2(x) + 4} - \mu_{\underline{A}}^2(x)}{2}$$

于是:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A}_p'}(x) &= \bigvee_{y \in Y} ((\mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y)) \wedge (1 - \mu_{\underline{B}}^2(y))) \\ &= \frac{\mu_{\underline{A}}(x) \sqrt{\mu_{\underline{A}}^2(x) + 4} - \mu_{\underline{A}}^2(x)}{2} \end{aligned}$$

(3) $\tilde{B}' = \text{not } \tilde{B}^{0.5}$ 的情况 如图 5.6(c)所示。这种情况类似于前两种情况, $S_T(1 - \mu_{\underline{B}}^{0.5})$ 的最大值点满足:

$$1 - \mu_{\underline{B}}^{0.5}(y) = \mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y)$$

据此可得:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A}_p'}(x) &= \bigvee_{y \in Y} ((\mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y) \wedge (1 - \mu_{\underline{B}}^{0.5}(y))) \\ &= \frac{2\mu_{\underline{A}}(x) + 1 - \sqrt{4\mu_{\underline{A}}(x) + 1}}{2\mu_{\underline{A}}(x)} \end{aligned}$$

(4) $\tilde{B}' = \tilde{B}$ 的情况 如图 5.6(d)所示。这非常类似 GMP 的 $\tilde{A}' = \tilde{A}$ 的情况,有:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A}_p'}(x) &= \bigvee_{y \in Y} ((\mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y)) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)) \\ &= \mu_{\underline{A}}(x), \quad \text{当 } \mu_{\underline{B}}(y) = 1 \end{aligned}$$

以上是用 Larsen 的乘积运算规则定义模糊关系时的情况。对于其它的定义,我们可以用类似的方法推导出它们用于模糊推理时的结果。我们把推导结果列于表 5.6 和 5.7, 两个表分别对应 GMP 和 GMT 的情形。为了书写方便,表中隶属函数 $\mu_{\underline{A}}(x)$ 和 $\mu_{\underline{B}}(y)$ 简记为 μ_A 和 μ_B 。

表 5.6 GMP 推理结果

	\tilde{A}	very \tilde{A}	more or less \tilde{A}	not \tilde{A}
\tilde{R}_m	$0.5 \vee \mu_B$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee \mu_B$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee \mu_B$	1
\tilde{R}_a	$\frac{1 + \mu_B}{2}$	$\frac{3 + 2\mu_B - \sqrt{5 + 4\mu_B}}{2}$	$\frac{\sqrt{5 + 4\mu_B} - 1}{2}$	1
\tilde{R}_c	μ_B	μ_B	μ_B	$0.5 \wedge \mu_B$
\tilde{R}_p	μ_B	μ_B	μ_B	$\frac{\mu_B}{1 + \mu_B}$

续表

	\underline{A}	very \underline{A}	more or less \underline{A}	not \underline{A}
\underline{R}_1	μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	1
\underline{R}_2	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1
\underline{R}_{15}	μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	$1 - \mu_B$
\underline{R}_{16}	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	$1 - \mu_B$
\underline{R}_{17}	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	$1 - \mu_B$
\underline{R}_{18}	μ_B	μ_B^2	$\sqrt{\mu_B}$	$1 - \mu_B$
\underline{R}_b	$0.5 \vee \mu_B$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee \mu_B$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee \mu_B$	1
\underline{R}_Δ	$\sqrt{\mu_B}$	$\mu_B^{2/3}$	$\mu_B^{1/3}$	1
\underline{R}_Δ	$\sqrt{\mu_B} \wedge \frac{1}{2 - \mu_B}$	$\mu_B^{2/3} \wedge \left[\frac{\sqrt{5 - 4\mu_B} - 1}{2(1 - \mu_B)} \right]^2$	$\mu_B^{1/3} \wedge \frac{\sqrt{\mu_B^2 - 2\mu_B + 5} + \mu_B - 1}{2}$	1
\underline{R}_*	$\frac{1}{2 - \mu_B}$	$\left[\frac{\mu_B - 1 + \sqrt{(1 - \mu_B)^2 + 4}}{2} \right]^2$	$\frac{\sqrt{5 - 4\mu_B} - 1}{2(1 - \mu_B)}$	1
\underline{R}_n	$0.5 \vee \mu_B$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee \mu_B$	$\mu_B \vee \left[(1 - \mu_B) \wedge \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]$	$\mu_B \vee (1 - \mu_B)$
\underline{R}_\square	1	1	1	1

表 5.7 GMT 推理结果

	not \underline{B}	not very \underline{B}	not more or less \underline{B}	\underline{B}
\underline{R}_m	$0.5 \vee (1 - \mu_A)$	$(1 - \mu_A) \vee \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \wedge \mu_A \right)$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee (1 - \mu_A)$	$\mu_A \vee (1 - \mu_A)$
\underline{R}_d	$1 - \frac{\mu_A}{2}$	$\frac{1 - 2\mu_A + \sqrt{1 + 4\mu_A}}{2}$	$\frac{3 - \sqrt{1 + 4\mu_A}}{2}$	1
\underline{R}_c	$0.5 \wedge \mu_A$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \wedge \mu_A$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \wedge \mu_A$	μ_A
\underline{R}_p	$\frac{\mu_A}{1 + \mu_A}$	$\frac{\mu_A \sqrt{\mu_A^2 + 4} - \mu_A^2}{2}$	$\frac{2\mu_A + 1 - \sqrt{4\mu_A + 1}}{2\mu_A}$	μ_A
\underline{R}_l	$1 - \mu_A$	$1 - \mu_A^2$	$1 - \sqrt{\mu_A}$	1
\underline{R}_k	$0.5 \vee (1 - \mu_A)$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee (1 - \mu_A^2)$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee (1 - \sqrt{\mu_A})$	1
\underline{R}_{15}	$1 - \mu_A$	$1 - \mu_A^2$	$1 - \sqrt{\mu_A}$	$0.5 \vee \mu_A$
\underline{R}_{16}	$0.5 \vee (1 - \mu_A)$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee (1 - \mu_A^2)$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee (1 - \sqrt{\mu_A})$	$0.5 \vee \mu_A$
\underline{R}_{17}	$0.5 \vee (1 - \mu_A)$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee (1 - \mu_A^2)$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee (1 - \sqrt{\mu_A})$	μ_A
\underline{R}_{18}	$1 - \mu_A$	$1 - \mu_A^2$	$1 - \sqrt{\mu_A}$	μ_A

续表

	not \underline{B}	not very \underline{B}	not more or less \underline{B}	\underline{B}
R_{\sim}	$0.5 \vee (1 - \mu_A)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee (1 - \mu_A)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1 - \mu_A)$	1
R_{Δ}	$\frac{1}{1+\mu_A}$	$\frac{\sqrt{1+4\mu_A^2}-1}{2\mu_A^2}$	$\frac{2+\mu_A-\sqrt{\mu_A^2+4\mu_A}}{2}$	1
R_{Δ}	$\frac{1}{1+\mu_A} \wedge \sqrt{1-\mu_A}$			1
R_{*}	$\frac{1}{1+\mu_A}$	$1 - \frac{\mu_A(\mu_A+2-\sqrt{\mu_A^2+4\mu_A})}{2}$	$\frac{2\mu_A+1-\sqrt{1+4\mu_A^2}}{2\mu_A}$	1
R_{*}	$0.5 \vee (1 - \mu_A)$	$(1 - \mu_A) \vee \left(\mu_A \wedge \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee (1 - \mu_A)$	$\mu_A \vee (1 - \mu_A)$
R_{\square}	$\begin{cases} 1 & \mu_A < 1 \\ 0 & \mu_A = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & \mu_A < 1 \\ 0 & \mu_A = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & \mu_A < 1 \\ 0 & \mu_A = 1 \end{cases}$	1

我们将表 5.4 和表 5.6 相对照,即 GMP 时的直觉推理的判断准则和推理结果相比较,就得到 $R_{\sim}, R_{\Delta}, \dots, R_{\square}$ 等不同的模糊关系定义下的推理方法对直觉判断准则的满足情况,满足情况汇总于表 5.8,其中“0”表示满足,“×”表示不满足。同样,表 5.5 和表 5.7 即 GMT 时的对照比较结果也汇总于表 5.8 中。

表 5.8 对直觉判断准则的满足情况

	小前提	结论	R_{\sim}	R_{Δ}	R_{Δ}	R_{*}	R_{*}	R_{\sim}	R_{Δ}	R_{Δ}	R_{*}	R_{*}	R_{\sim}	R_{Δ}	R_{Δ}	R_{*}	R_{*}	R_{\square}
Relation I	\underline{A}	\underline{B}	×	×	0	0	0	0	0	0	0	0	×	×	×	×	×	×
Relation I-1	very \underline{A}	very \underline{B}	×	×	×	×	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×	×	×
Relation I-2	very \underline{A}	\underline{B}	×	×	0	0	×	0	×	0	0	×	×	×	×	×	×	×
Relation II-1	more or less \underline{A}	more or less \underline{B}	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	×	×	×	×	×	×
Relation II-2	more or less \underline{A}	\underline{B}	×	×	0	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Relation N-1	not \underline{A}	unknown	0	0	×	×	0	0	×	×	×	×	0	0	0	0	×	0
Relation N-2	not \underline{A}	not \underline{B}	×	×	×	×	×	0	0	0	0	0	×	×	×	×	×	×
Relation V	not \underline{B}	not \underline{A}	×	×	×	×	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×	×	×
Relation VI	not very \underline{B}	not very \underline{A}	×	×	×	×	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×	×	×
Relation VII	not more or less \underline{B}	not more or less \underline{A}	×	×	×	×	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×	×	×
Relation VII-1	\underline{B}	unknown	×	0	×	×	0	0	×	×	×	×	0	0	0	0	×	0
Relation VII-2	\underline{B}	\underline{A}	×	×	0	0	×	×	×	×	0	0	×	×	×	×	×	×

我们再看 Mizumoto 等进行不同推理方法比较的另一面,即对所谓“三段论法”的符合性。

设 P_1, P_2, P_3 是三个模糊推理句,形如:

P_1 : 若 x 是 \underline{A} 则 y 是 \underline{B}

P_2 : 若 y 是 \underline{B} 则 z 是 \underline{C}

P_3 : 若 x 是 \underline{A} 则 z 是 \underline{C}

其中, $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ 分别是 X, Y, Z 中的模糊集合, 即 $\underline{A} \in F(X), \underline{B} \in F(Y), \underline{C} \in F(Z)$ 。若 P_3 可以从 P_1 和 P_2 推得, 则称符合“三段论法”, 即有:

P_1 : 若 x 是 \underline{A} 则 y 是 \underline{B}

P_2 : 若 y 是 \underline{B} 则 z 是 \underline{C}

P_3 : 若 x 是 \underline{A} 则 z 是 \underline{C}

令 $\underline{R}(A; B), \underline{R}(B; C), \underline{R}(A; C)$ 分别表示模糊推理句 P_1, P_2 和 P_3 的模糊关系, $\underline{R}(A; B) \in F(X \times Y), \underline{R}(B; C) \in F(Y \times Z), \underline{R}(A; C) \in F(X \times Z)$, 若下式成立则说明推理符合三段论法, 即:

$$\underline{R}(A; B) \circ \underline{R}(B; C) = \underline{R}(A; C)$$

上述公式等价于:

P_1 : 若 x 是 \underline{A} 则 y 是 $\underline{B} \rightarrow \underline{R}(A; B)$

P_2 : 若 y 是 \underline{B} 则 z 是 $\underline{C} \rightarrow \underline{R}(B; C)$

P_3 : 若 x 是 \underline{A} 则 z 是 $\underline{C} \leftarrow \underline{R}(A; B) \circ \underline{R}(B; C)$

其中合成规则取“ $\vee - \wedge$ ”运算。

现在我们就来考查不同的模糊关系定义下三段论法公式是否成立。先从 \underline{R}_a 开始, 有:

$$\underline{R}_a(A; B) = (\overline{\underline{A}} \times Y) \oplus (X \times \underline{B})$$

$$\underline{R}_a(B; C) = (\overline{\underline{B}} \times Z) \oplus (Y \times \underline{C})$$

于是:

$$\underline{R}_a(A; B) \circ \underline{R}_a(B; C) = ((\overline{\underline{A}} \times Y) \oplus (X \times \underline{B})) \circ ((\overline{\underline{B}} \times Z) \oplus (Y \times \underline{C}))$$

其隶属函数为:

$$\begin{aligned} & \mu_{\underline{R}_a(A; B) \circ \underline{R}_a(B; C)}(x, z) \\ &= \bigvee_{y \in Y} ((1 \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{B}}(y))) \wedge (1 \wedge (1 - \mu_{\underline{B}}(y) + \mu_{\underline{C}}(z)))) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (\alpha \wedge \beta) \end{aligned} \quad (5.44)$$

其中 $\alpha = 1 \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{B}}(y))$, $\beta = 1 \wedge (1 - \mu_{\underline{B}}(y) + \mu_{\underline{C}}(z))$, α 可以由带有参数 $\mu_{\underline{A}}(x) = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 的图形表示, 如图 5.7(a), β 则由带有参数 $\mu_{\underline{C}}(z)$ 的图形表示, 如图 5.7(b)。那么带有参数 $\mu_{\underline{A}}(x) = a, \mu_{\underline{C}}(z) = c, a, c \in [0, 1], a > c$ 时的 $\alpha \wedge \beta$ 示于图 5.7(c) 中, 用虚线“----”表示。其最大值则是直线 $\alpha = 1 \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{B}}(y)) = 1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{B}}(y) = 1 - a + \mu_{\underline{B}}(y)$ 与直线 $\beta = 1 \wedge (1 - \mu_{\underline{B}}(y) + \mu_{\underline{C}}(z)) = 1 - \mu_{\underline{B}}(y) + \mu_{\underline{C}}(z) = 1 - \mu_{\underline{B}}(y) + c$ 的交点, 即:

$$1 - a + \mu_{\underline{B}}(y) = 1 - \mu_{\underline{B}}(y) + c$$

$$\mu_{\underline{B}}(y) = \frac{a+c}{2}$$

因此, $\alpha \wedge \beta$ 的最大值为:

$$1 - a + \frac{a+c}{2} = 0.5 + \frac{1-a+c}{2} < 1$$

以上情况对应 $a > c$ 。若 $a \leq c$, 如图 5.7(c) 中, 令 $\mu_{\underline{A}}(x) = a$, 则 $\alpha \wedge \beta$ 的曲线如图中点划线“— · — · —”所示, $\alpha \wedge \beta$ 的最大值为 1, 而此时式 $0.5 + \frac{1-a+c}{2} \geq 1$ 。

因此, 不论 a, c 怎样取值, 总有 $\alpha \wedge \beta$ 的最大值为: $1 \wedge \left(0.5 + \frac{1}{2}(1-a+c) \right)$ 。那么, 式 (5.44) 就变为:

$$\mu_{\underline{R}_a(A;B) \circ \underline{R}_a(B;C)}(x,z) = 1 \wedge \left(0.5 + \frac{1}{2}(1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{C}}(z)) \right) \quad (5.45)$$

于是我们有:

$$\begin{aligned} & \underline{R}_a(A;B) \circ \underline{R}_a(B;C) \\ &= \int_{X \times Z} 1 \wedge \left(0.5 + \frac{1}{2}(1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{C}}(z)) \right) / (x, z) \\ &\neq \underline{R}_a(A;C) = \int_{X \times Z} 1 \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \end{aligned}$$

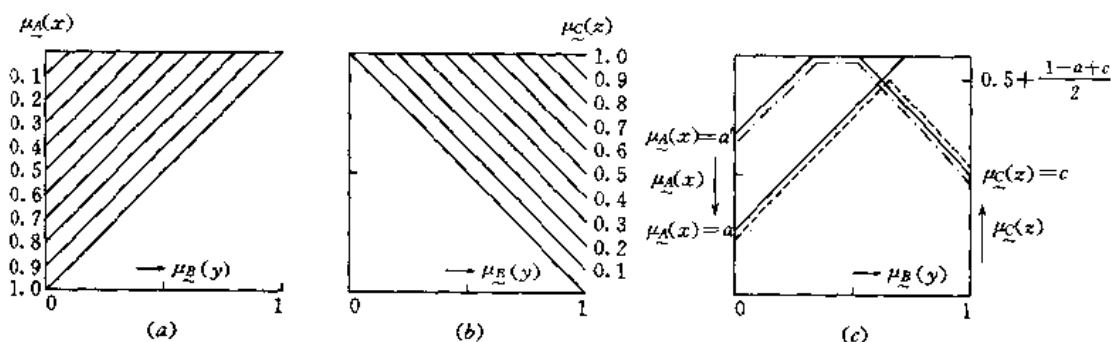


图 5.7 5.45 式的推导过程 (a) α (b) β (c) $\alpha \wedge \beta$

我们说使用模糊关系 \underline{R}_a 的推理不满足三段论法。

与 \underline{R}_a 的情况类似, 我们可以求出 $\underline{R}_m, \underline{R}_c, \underline{R}_p, \underline{R}_s, \underline{R}_g, \underline{R}_{gx}, \underline{R}_{gx}, \underline{R}_{gs}, \underline{R}_{ss}, \underline{R}_b, \underline{R}_\Delta, \underline{R}_\Delta, \underline{R}_*, \underline{R}_*, \underline{R}_\square$ 情况下的结果, 罗列如下:

$$\begin{aligned} & \underline{R}_m(A;B) \circ \underline{R}_m(B;C) \\ &= \int_{X \times Z} 0.5 \vee (\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{C}}(z)) \vee (1 - \mu_{\underline{A}}(x)) / (x, z) \\ &\neq \underline{R}_m(A;C) = \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{C}}(z)) \vee (1 - \mu_{\underline{A}}(x)) / (x, z) \\ & \underline{R}_c(A;B) \circ \underline{R}_c(B;C) \\ &= \int_{X \times Z} \mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{C}}(z) / (x, z) \\ &= \underline{R}_c(A;C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}_p(A;B) \circ \tilde{R}_p(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} \mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{C}}(z) / (x, z) \\
&\neq \tilde{R}_p(A;C) \\
& \tilde{R}_s(A;B) \circ \tilde{R}_s(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} \mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{s} \mu_{\underline{C}}(z) / (x, z) \\
& \tilde{R}(A;C) \\
& \tilde{R}_g(A;B) \circ \tilde{R}_g(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} \mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{g} \mu_{\underline{C}}(z) / (x, z) \\
&= \tilde{R}_g(A;C) \\
& \tilde{R}_{sg}(A;B) \circ \tilde{R}_{sg}(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{s} \mu_{\underline{C}}(z)) \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{g} 1 - \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \\
&= \tilde{R}_{sg}(A;C) \\
& \tilde{R}_{gg}(A;B) \circ \tilde{R}_{gg}(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{g} \mu_{\underline{C}}(z)) \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{g} 1 - \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \\
&= \tilde{R}_{gg}(A;C) \\
& \tilde{R}_{gs}(A;B) \circ \tilde{R}_{gs}(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{g} \mu_{\underline{C}}(z)) \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{s} 1 - \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \\
&= \tilde{R}_{gs}(A;C) \\
& \tilde{R}_{ss}(A;B) \circ \tilde{R}_{ss}(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{s} \mu_{\underline{C}}(z)) \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{s} 1 - \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \\
&= \tilde{R}_{ss}(A;C) \\
& \tilde{R}_b(A;B) \circ \tilde{R}_b(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} 0.5 \vee (1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \vee \mu_{\underline{C}}(z) / (x, z) \\
&\neq \tilde{R}_b(A;C) = \int_{X \times Z} (1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \vee \mu_{\underline{C}}(z) / (x, z) \\
& \tilde{R}_{\Delta^*}(A;B) \circ \tilde{R}_{\Delta^*}(B;C) \\
&= \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\Delta} \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \\
&\neq \tilde{R}_{\Delta}(A;C) = \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\Delta} \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z)
\end{aligned}$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\Delta} \mu_{\underline{C}}(z) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{C}}(z) \\ \sqrt{\frac{\mu_{\underline{C}}(z)}{\mu_{\underline{A}}(x)}}, & \mu_{\underline{A}}(x) > \mu_{\underline{C}}(z) \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\Delta} \mu_{\underline{C}}(z) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{C}}(z) \\ \frac{\mu_{\underline{C}}(z)}{\mu_{\underline{A}}(x)}, & \mu_{\underline{A}}(x) > \mu_{\underline{C}}(z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{\blacktriangle}(A;B) \circ \tilde{R}_{\blacktriangle}(B;C) \\ &= \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\blacktriangle} \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \\ &\neq \tilde{R}_{\blacktriangle}(A;C) = \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\blacktriangle} \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \end{aligned}$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\blacktriangle} \mu_{\underline{C}}(z) = \begin{cases} 1 \wedge \sqrt{\frac{\mu_{\underline{C}}(z)}{\mu_{\underline{A}}(x)}} \wedge \sqrt{\frac{1 - \mu_{\underline{A}}(x)}{1 - \mu_{\underline{C}}(z)}} \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{C}}(z)), \\ \mu_{\underline{A}}(x) > 0, \quad 1 - \mu_{\underline{C}}(z) > 0 \\ 1, \quad \mu_{\underline{A}}(x) = 0 \text{ 或 } 1 - \mu_{\underline{C}}(z) = 0 \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\blacktriangle} \mu_{\underline{C}}(z) = \begin{cases} 1 \wedge \frac{\mu_{\underline{C}}(z)}{\mu_{\underline{A}}(x)} \wedge \frac{1 - \mu_{\underline{A}}(x)}{1 - \mu_{\underline{C}}(z)}, & \mu_{\underline{A}}(x) > 0, \quad 1 - \mu_{\underline{C}}(z) > 0 \\ 1, & \mu_{\underline{A}}(x) = 0 \text{ 或 } 1 - \mu_{\underline{C}}(z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{\bullet}(A;B) \circ \tilde{R}_{\bullet}(B;C) \\ &= \int_{X \times Z} \frac{1 - \mu_{\underline{C}}(z) + \mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{C}}(z)}{1 - \mu_{\underline{C}}(z) + \mu_{\underline{A}}(x)} / (x, z) \\ &\neq \tilde{R}_{\bullet}(A;C) = \int_{X \times Z} 1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{C}}(z) / (x, z) \\ & \tilde{R}_{\#}(A;B) \circ \tilde{R}_{\#}(B;C) \\ &= \int_{X \times Z} (0.5 \vee (1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \vee \mu_{\underline{C}}(z)) \wedge (\mu_{\underline{A}}(x) \vee (1 - \mu_{\underline{A}}(x))) \\ &\quad \wedge ((1 - \mu_{\underline{C}}(z)) \vee \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neq \tilde{R}_{\#}(A;C) = \int_{X \times Z} ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \vee \mu_{\underline{C}}(z)) \wedge (\mu_{\underline{A}}(x) \vee \\ & \quad (1 - \mu_{\underline{A}}(x))) \wedge ((1 - \mu_{\underline{C}}(z)) \vee \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{\square}(A;B) \circ \tilde{R}_{\square}(B;C) \\ &= \int_{X \times Z} (\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\square} \mu_{\underline{C}}(z)) / (x, z) \\ &= \tilde{R}_{\square}(A;C) \end{aligned}$$

其中:

$$\mu_{\underline{A}}(x) \xrightarrow{\square} \mu_{\underline{C}}(z) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underline{A}}(x) < 1 \text{ 或 } \mu_{\underline{C}}(z) = 1 \\ 0, & \mu_{\underline{A}}(x) = 1, \mu_{\underline{C}}(z) < 1 \end{cases}$$

以上结果汇总于表 5.9, 其“0”和“×”分别表示满足三段论法和 not 满足三段论法。

表 5.9 对三段论法和换命题质位的满足情况

	\tilde{R}_m	\tilde{R}_a	\tilde{R}_c	\tilde{R}_p	\tilde{R}_s	\tilde{R}_x	\tilde{R}_{xx}	\tilde{R}_{ss}	\tilde{R}_{sx}	\tilde{R}_n	\tilde{R}_b	\tilde{R}_Δ	\tilde{R}_Δ	\tilde{R}_\bullet	$\tilde{R}_\#$	\tilde{R}_\square
三段论法	×	×	0	×	0	0	0	0	0	0	×	×	×	×	×	0
换命题质位	×	0	×	×	0	×	×	×	×	0	0	×	×	0	0	×

最后再考查一下对换命题质位的满足情况。

设有一个模糊推理句:

P_1 : 若 x 是 \underline{A} 则 y 是 \underline{B}

和它的换命题质位(contrapositive)模糊推理句 P_2 :

P_2 : 若 y 不是 \underline{B} 则 x 不是 \underline{A}

我们可以由 P_1 得到模糊关系 $\tilde{R}(\underline{A}; \underline{B}) \in F(X \times Y)$ 并可以由 P_2 得到模糊关系 $\tilde{R}(\underline{B}; \underline{A}) \in F(Y \times X)$ 。若下式成立:

$$\tilde{R}(\underline{B}; \underline{A}) = \tilde{R}^{-1}(\underline{A}; \underline{B})$$

则换命题质位满足,

例如: 对于 \tilde{R}_a , 有:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_a(\underline{B}; \underline{A}) &= \int_{Y \times X} 1 \wedge (1 - (1 - \mu_{\underline{B}}(y)) + (1 - \mu_{\underline{A}}(x))) / (y, x) \\ &= \int_{Y \times X} 1 \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{B}}(y)) / (y, x) \\ &= \tilde{R}_a^{-1}(\underline{A}; \underline{B}) \end{aligned}$$

因此满足换命题质位。

对于 \tilde{R}_p , 有:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_p(\underline{B}; \underline{A}) &= \int_{Y \times X} (1 - \mu_{\underline{B}}(y))(1 - \mu_{\underline{A}}(x)) / (y, x) \\ &= \int_{Y \times X} (1 - \mu_{\underline{A}}(x) - \mu_{\underline{B}}(y)) + \mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y) / (y, x) \\ &\neq \tilde{R}_p^{-1}(\underline{A}; \underline{B}) = \int_{Y \times X} \mu_{\underline{A}}(x)\mu_{\underline{B}}(y) / (y, x) \end{aligned}$$

因此不满足换命题质位。

对于其它模糊关系的情况, 我们不再一一推导, 而是把推导结果汇总于表 5.9 中。

根据以上这两大方面的比较, Mizumoto 等得到如下有意思的结论: \tilde{R}_m 和 \tilde{R}_a 不适于模糊推理, \tilde{R}_c 和 \tilde{R}_p 不是坏方法, 而 $\tilde{R}_s, \tilde{R}_x, \tilde{R}_{xx}, \tilde{R}_{ss}, \tilde{R}_{sx}, \tilde{R}_n$ 是适于模糊推理的, $\tilde{R}_b, \tilde{R}_\Delta, \tilde{R}_\bullet, \tilde{R}_\#, \tilde{R}_\square$ 则不是好方法。其它学者也有不甚相同的研究结果和观点, 有兴趣的读者可自行研究。

5.4 模糊逻辑推理的扩充形式

模糊逻辑推理的扩充形式是其基本推理形式的扩展。扩展的内容主要是推理前提由简单单一的模糊推理句变为形式更为复杂的模糊推理句。如大前提可扩充为多重、多维或多重多维的模糊推理句,分别称为多重、多维和多重多维模糊逻辑推理。

5.4.1 多维模糊逻辑推理

所谓多维模糊逻辑推理其逻辑结构形式如下:

大前提: 若 x_1 是 \tilde{A}_1 且 x_2 是 \tilde{A}_2 且 \cdots 且 x_n 是 \tilde{A}_n 则 y 是 \tilde{B}

小前提: x_1 是 \tilde{A}'_1 且 x_2 是 \tilde{A}'_2 且 \cdots 且 x'_n 是 \tilde{A}'_n

结论: y 是 \tilde{B}'

其中: $\tilde{A}_i, \tilde{A}'_i \in F(X_i), i=1, 2, \cdots, n, \tilde{B}, \tilde{B}' \in F(Y), X_i, Y$ 是论域。上式可简记为:

$$\begin{array}{c} (\tilde{A}_1) \text{ 且 } (\tilde{A}_2) \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } (\tilde{A}_n) \rightarrow (\tilde{B}) \\ (\tilde{A}'_1) \text{ 且 } (\tilde{A}'_2) \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } (\tilde{A}'_n) \end{array}$$

(\tilde{B}')

可以看到大前提的前件和小前提不再是简单的模糊判断句,而是 n 个模糊判断句用“而且”连结起来的复合句型,它们对应了 n 个论域 X_i 上的 n 个模糊集合 \tilde{A}_i 和 $\tilde{A}'_i, i=1, 2, \cdots, n$ 。因为 \tilde{A}_i 是 n 个不同论域上的模糊集合,因此复合模糊判断句 $(\tilde{A}_1) \text{ 且 } (\tilde{A}_2) \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } (\tilde{A}_n)$ 的真域定义为 \tilde{A}_i 的 n 维直积,即 $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \cdots \times \tilde{A}_n$,这是 Zadeh 的处理方式,那么大前提所表达的多维的模糊推理句,可以看成是直积 $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \cdots \times \tilde{A}_n$ 到 \tilde{B} 的模糊关系 \tilde{R} ,为明确计, \tilde{R} 可以记为 $\tilde{R}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n; \tilde{B})$ 。因此根据模糊推理的合成规则,将模糊推理的基本形式(式 5.13)扩充,不难有:

$$\tilde{B}' = (\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2 \times \cdots \times \tilde{A}'_n) \circ \tilde{R}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n; \tilde{B}) \quad (5.46)$$

$\tilde{R}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n; \tilde{B})$ 是一个 $n+1$ 维的模糊关系。为直观起见,我们把 $n=2$ 的情形和基本形式(即 $n=1$)绘于图 5.8 中。

由图 5.8 可见, $\tilde{R}(\tilde{A}; \tilde{B})$ 和 $\tilde{R}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2; \tilde{B})$ 分别表示 $X \times Y$ 和 $X_1 \times X_2 \times Y$ 上的二维和三维的模糊关系。那么 $\tilde{R}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n; \tilde{B})$ 则表示 $n+1$ 维直积空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y$ 上的 $n+1$ 维模糊关系。

直积一般按取小运算求隶属函数,即:

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \cdots \times \tilde{A}_n = \int_{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n} \mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) / (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

以下我们以 $n=2$ 为例说明多维模糊推理的算示。

当我们选 $\tilde{R}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2; \tilde{B}) = \tilde{R}_a(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2; \tilde{B})$, 合成运算取“ $\vee - \wedge$ ”运算,有:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2; \tilde{B}) &= \tilde{R}_a(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2; \tilde{B}) \\ &= (\overline{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times Y}) \oplus ((X_1 \times X_2) \times \tilde{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{X_1 \times X_2 \times Y} 1 \wedge (1 - (\mu_{\underline{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}_2}(x_2)) + \mu_{\underline{B}}(y)) / (x_1, x_2, y) \\
\tilde{B}'_a &= (\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2) \circ \tilde{R}_a(A_1, A_2; B) \\
\mu_{\tilde{B}'}(y) &= \bigvee_{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2} \{(\mu_{\tilde{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}'_2}(x_2)) \wedge [1 \wedge (1 - (\mu_{\underline{A}_1}(x_1) \\
&\quad \wedge \mu_{\underline{A}_2}(x_2)) + \mu_{\underline{B}}(y))]\} \quad (5.47)
\end{aligned}$$

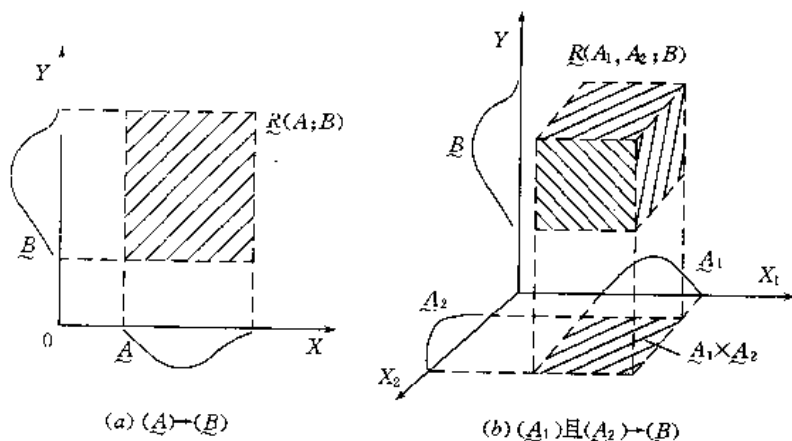


图 5.8 多维模糊推理句表示的模糊关系

当取 $\tilde{R}(A_1, A_2; B) = \tilde{R}_m(A_1, A_2; B)$, 合成运算采用“ $\vee - \wedge$ ”时, 有:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(A_1, A_2; B) &= \tilde{R}_m(A_1, A_2; B) \\
&= \int_{X_1 \times X_2 \times Y} [(\mu_{\underline{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}_2}(x_2)) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)] \vee [1 - (\mu_{\underline{A}_1}(x_1) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{A}_2}(x_2))] / (x_1, x_2, y) \\
\tilde{B}'_m &= (\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2) \circ \tilde{R}_m(A_1, A_2; B) \\
\mu_{\tilde{B}'}(y) &= \bigvee_{(x_1, x_2) \in (X_1 \times X_2)} \{(\mu_{\tilde{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}'_2}(x_2)) \wedge [(\mu_{\underline{A}_1}(x_1) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{A}_2}(x_2) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)) \vee (1 - (\mu_{\underline{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}_2}(x_2)))]\} \quad (5.48)
\end{aligned}$$

当取 $\tilde{R}(A_1, A_2; B) = \tilde{R}_c(A_1, A_2; B)$, 合成运算取“ $\vee - \wedge$ ”时, 有:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(A_1, A_2; B) &= \tilde{R}_c(A_1, A_2; B) \\
&= \int_{X_1 \times X_2 \times Y} \mu_{\underline{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}_2}(x_2) \wedge \mu_{\underline{B}}(y) / (x_1, x_2, y) \\
\tilde{B}'_c &= (\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2) \circ \tilde{R}_c(A_1, A_2; B) \\
\mu_{\tilde{B}'}(y) &= \bigvee_{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2} \{(\mu_{\tilde{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}'_2}(x_2)) \wedge (\mu_{\underline{A}_1}(x_1) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{A}_2}(x_2) \wedge \mu_{\underline{B}}(y))\} \quad (5.49)
\end{aligned}$$

对于 $\tilde{R}_c(A_1, A_2; B)$ 的情形, 可以证明有下面的等式成立:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}'_c &= (\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2) \circ \tilde{R}_c(A_1, A_2; B) \\
&= [\tilde{A}'_1 \circ \tilde{R}_c(A_1; B)] \cap [\tilde{A}'_2 \circ \tilde{R}_c(A_2; B)] \quad (5.50)
\end{aligned}$$

也可表示为:

$$(\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2) \circ [(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2) \rightarrow \tilde{B}] \\ [\tilde{A}'_1 \circ (\tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{B})] \cap [\tilde{A}'_2 \circ (\tilde{A}_2 \rightarrow \tilde{B})]$$

证明:对于 \tilde{R} , 有下述隶属函数运算式成立:

$$(a_1 \wedge a_2) \rightarrow b = (a_1 \rightarrow b) \wedge (a_2 \rightarrow b)$$

上式两边均等于 $a_1 \wedge a_2 \wedge b$ 。因此:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{R}_c(A_1, A_2; B)}(x_1, x_2, y) \\ &= (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)) \rightarrow \mu_{\tilde{B}}(y) \\ &= (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \rightarrow \mu_{\tilde{B}}(y)) \wedge (\mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \rightarrow \mu_{\tilde{B}}(y)) \\ &= \mu_{\tilde{R}_c(A_1, B)}(x_1, y) \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_2, B)}(x_2, y) \\ \tilde{B}'_c &= (\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2) \circ \tilde{R}_c(A_1, A_2; B) \end{aligned}$$

下面的推导中用 $\mu_{\tilde{A}_1}$ 代表 $\mu_{\tilde{A}_1}(x)$ 以便书写简化, 余类推。

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}'_c} &= (\mu_{\tilde{A}'_1} \wedge \mu_{\tilde{A}'_2}) \circ \mu_{\tilde{R}_c(A_1, A_2; B)} \\ &= \bigvee_{x_1 \times x_2} [(\mu_{\tilde{A}'_1} \wedge \mu_{\tilde{A}'_2}) \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_1, A_2; B)}] \\ &= \bigvee_{x_1 \times x_2} [(\mu_{\tilde{A}'_1} \wedge \mu_{\tilde{A}'_2}) \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_1, B)} \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_2, B)}] \\ &= \bigvee_{x_1 \times x_2} [(\mu_{\tilde{A}'_1} \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_1, B)}) \wedge (\mu_{\tilde{A}'_2} \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_2, B)})] \\ &= \bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} [(\mu_{\tilde{A}'_1} \wedge (\mu_{\tilde{R}_c(A_1, B)})) \wedge (\mu_{\tilde{A}'_2} \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_2, B)})] \\ &= [\bigvee_{x_1} (\mu_{\tilde{A}'_1} \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_1, B)})] \wedge [\bigvee_{x_2} (\mu_{\tilde{A}'_2} \wedge \mu_{\tilde{R}_c(A_2, B)})] \end{aligned}$$

因此我们有:

$$(\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2) \circ \tilde{R}_c(A_1, A_2; B) \\ = [\tilde{A}'_1 \circ \tilde{R}_c(A_1; B)] \cap [\tilde{A}'_2 \circ \tilde{R}_c(A_2; B)]$$

在以上隶属函数过程的倒数第三步到最后一步的过程中, 在 $(X_1 \times X_2)$ 论域上的取大运算 $\bigvee_{x_1 \times x_2}$ 拆成 X_1 和 X_2 论域上的取大运算 \bigvee_{x_1} 和 \bigvee_{x_2} , 分别对各自相关的隶属函数运算。这一步变换的证明如下。当 X_1, X_2 为有限离散论域时, 可用数学归纳法证明, 只要证明下述等式成立:

$$\bigvee_{x_1 \times x_2} (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)) = (\bigvee_{x_1} \mu_{\tilde{A}_1}(x_1)) \wedge (\bigvee_{x_2} \mu_{\tilde{A}_2}(x_2))$$

当 X_1, X_2 各包含两个元素时, 设为 a_1, a_2 和 b_1, b_2 。

等式左边

$$\begin{aligned} &= (\mu_{\tilde{A}_1}(a_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(b_1)) \vee (\mu_{\tilde{A}_1}(a_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(b_2)) \vee \\ &\quad (\mu_{\tilde{A}_1}(a_2) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(b_1)) \vee (\mu_{\tilde{A}_1}(a_2) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(b_2)) \end{aligned}$$

等式右边

$$\begin{aligned} &(\mu_{\tilde{A}_1}(a_1) \vee \mu_{\tilde{A}_1}(a_2)) \wedge (\mu_{\tilde{A}_2}(b_1) \vee \mu_{\tilde{A}_2}(b_2)) \\ &= [(\mu_{\tilde{A}_1}(a_1) \vee \mu_{\tilde{A}_1}(a_2)) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(b_1)] \vee [(\mu_{\tilde{A}_1}(a_1) \vee \mu_{\tilde{A}_1}(a_2)) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(b_2)] \end{aligned}$$

$$= (\mu_{A_1}(a_1) \wedge \mu_{A_2}(b_1)) \vee (\mu_{A_1}(a_2) \wedge \mu_{A_2}(b_1)) \vee \\ (\mu_{A_1}(a_1) \wedge \mu_{A_2}(b_2)) \vee (\mu_{A_1}(a_2) \wedge \mu_{A_2}(b_2))$$

等式成立。

设 X_1, X_2 各包含 n 个元素时等式成立, 记为:

$$\bigvee_{x_1 \times x_2}^{n \times n} (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)) = (\bigvee_{X_1}^n \mu_{A_1}(x_1)) \wedge (\bigvee_{X_2}^n \mu_{A_2}(x_2))$$

当 X_1, X_2 包含 $n+1$ 个元素时, 有:

等式左边

$$= \bigvee_{x_1 \times x_2}^{(n+1) \times (n+1)} (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)) \\ = \bigvee_{x_1 \times x_2}^{n \times n} (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)) \vee (\bigvee_{X_1}^n (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1}))) \vee \\ (\bigvee_{X_2}^n (\mu_{A_1}(a_{n+1}) \wedge \mu_{A_2}(x_2))) \vee (\mu_{A_1}(a_{n+1}) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1}))$$

等式右边

$$= (\bigvee_{X_1}^{n+1} \mu_{A_1}(x_1)) \wedge (\bigvee_{X_2}^{n+1} \mu_{A_2}(x_2)) \\ = (\bigvee_{X_1}^n \mu_{A_1}(x_1) \vee \mu_{A_1}(a_{n+1})) \wedge (\bigvee_{X_2}^n \mu_{A_2}(x_2) \vee \mu_{A_2}(b_{n+1})) \\ = (\bigvee_{X_1}^n \mu_{A_1}(x_1) \wedge \bigvee_{X_2}^n \mu_{A_2}(x_2)) \vee (\bigvee_{X_1}^n \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1})) \vee \\ (\mu_{A_1}(a_{n+1}) \wedge \bigvee_{X_2}^n \mu_{A_2}(x_2)) \vee (\mu_{A_1}(a_{n+1}) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1})) \\ = \bigvee_{x_1 \times x_2}^{n \times n} (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)) \vee (\bigvee_{X_1}^n (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1}))) \vee \\ (\bigvee_{X_2}^n (\mu_{A_1}(a_{n+1}) \wedge \mu_{A_2}(x_2))) \vee (\mu_{A_1}(a_{n+1}) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1}))$$

等式成立。

上述推导中, 子式 $\bigvee_{X_1}^n \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1}) = \bigvee_{X_1}^n (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(b_{n+1}))$, 只要先将左边的

$\bigvee_{X_1}^n \mu_{A_1}(x_1)$ 展开, 然后用分配律即可导出。

证毕。

实际上对于多维的情形, 仍有下式成立:

$$\begin{aligned} B'_i &= (A'_1 \times A'_2 \times \cdots \times A'_n) \circ R_c(A_1, A_2, \cdots, A_n; B) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (A'_i \circ R_c(A_i; B)) = \bigcap_{i=1}^n B'_i \end{aligned} \quad (5.51)$$

对于 $R_o, R_i, R_e, R_\delta, R_\Delta, R_\nabla, R_\times, R_\square$, 可以验证, 它们满足:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \rightarrow b \Rightarrow (a_1 \rightarrow b) \vee (a_2 \rightarrow b) \vee \cdots \vee (a_n \rightarrow b)$$

并有下式成立:

$$\begin{aligned}
B' &= (\underline{A}'_1 \times \underline{A}'_2 \times \cdots \times \underline{A}'_n) \circ \underline{R}(A_1, A_2, \cdots, A_n; B) \\
&= \bigcup_{i=1}^n (\underline{A}'_i \circ \underline{R}(A_i; B)) = \bigcup_{i=1}^n B'_i
\end{aligned} \tag{5.52}$$

其中 \underline{A}'_i 为正规模糊集, $i=1, 2, \cdots, n$ 。

证明:

$$\begin{aligned}
&\mu_{\underline{R}(A_1, A_2, \cdots, A_n; B)}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) \\
&= ((\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n)) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y)) \\
&= (\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y)) \vee (\mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y)) \vee \cdots \vee \\
&\quad (\mu_{\underline{A}'_n}(x_n) \rightarrow \mu_{\underline{B}}(y)) \\
&= \mu_{\underline{R}(A_1, B)}(x_1, y) \vee \mu_{\underline{R}(A_2, B)}(x_2, y) \vee \cdots \vee \mu_{\underline{R}(A_n, B)}(x_n, y) \\
\mu_{\underline{B}'_1}(y) &= \bigvee_{x_1 \times \cdots \times x_n} \{(\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n)) \wedge \\
&\quad (\mu_{\underline{R}(A_1, B)}(x_1, y) \vee \mu_{\underline{R}(A_2, B)}(x_2, y) \vee \cdots \vee \mu_{\underline{R}(A_n, B)}(x_n, y))\} \\
&= \bigvee_{x_1 \times \cdots \times x_n} \{[(\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n)) \wedge \mu_{\underline{R}(A_1, B)}(x_1, y)] \\
&\quad \vee [(\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n)) \wedge \mu_{\underline{R}(A_2, B)}(x_2, y)] \\
&\quad \vee \cdots \vee [(\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n)) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{R}(A_n, B)}(x_n, y)]\} \\
&= \{ \bigvee_{x_1 \times \cdots \times x_n} [(\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{R}(A_1, B)}(x_1, y)) \wedge (\mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{A}'_3}(x_3) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n))] \} \vee \{ \bigvee_{x_1 \times \cdots \times x_n} [(\mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{R}(A_2, B)}(x_2, y)) \wedge (\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}'_3}(x_3) \wedge \cdots \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{A}'_n}(x_n))] \} \vee \cdots \vee \{ \bigvee_{x_1 \times \cdots \times x_n} [(\mu_{\underline{A}'_n}(x_n) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{R}(A_n, B)}(x_n, y)) \wedge (\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{A}'_{n-1}}(x_{n-1}))] \}
\end{aligned}$$

由前面式(5.50)的推导可知, 对上式每个大括号 $\{\}$ 中的子式有下面的等式成立(仅以第一个大括号中的子式为例):

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{x_1 \times \cdots \times x_n} [(\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{R}(A_1, B)}(x_1, y)) \wedge (\mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \mu_{\underline{A}'_3}(x_3) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n))] \\
&= \bigvee_{x_1} [\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{R}(A_1, B)}(x_1, y)] \wedge [\bigvee_{x_2 \times \cdots \times x_n} (\mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \\
&\quad \mu_{\underline{A}'_3}(x_3) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n))] \\
&= \bigvee_{x_1} (\mu_{\underline{A}'_1}(x_1) \wedge \mu_{\underline{R}(A_1, B)}(x_1, y))
\end{aligned}$$

上面的推导中, $\bigvee_{x_2 \times \cdots \times x_n} (\mu_{\underline{A}'_2}(x_2) \wedge \mu_{\underline{A}'_3}(x_3) \wedge \cdots \wedge \mu_{\underline{A}'_n}(x_n)) = (\bigvee_{x_2} \mu_{\underline{A}'_2}(x_2)) \wedge (\bigvee_{x_3} \mu_{\underline{A}'_3}(x_3)) \wedge \cdots \wedge (\bigvee_{x_n} \mu_{\underline{A}'_n}(x_n)) = 1$, 认为 $\underline{A}'_1, \underline{A}'_2, \underline{A}'_3, \cdots, \underline{A}'_n$ 为正规模糊集, 这在一般实际应用中总是成

立的。于是： $\mu_{\underline{B}'}(y) = \bigvee_{i=1}^n [\mu_{\underline{A}_i'}(x_i) \wedge \mu_{\underline{R}_i(A_i; B)}(x_i, y)]$ 。式(5.52)证毕。

(5.51)式和(5.52)式表明,对这两种情况的多维模糊逻辑推理,可以先按一维情形推导出分结果 \underline{B}_i' ,然后再作取小或取大的交或并运算。以上两式合成运算均取“ $\vee - \wedge$ ”运算。

5.4.2 多重模糊逻辑推理

多重模糊逻辑推理的逻辑结构为:

大前提:若 x_1 是 \underline{A}_1 则 y 是 \underline{B}_1 否则

若 x_2 是 \underline{A}_2 则 y 是 \underline{B}_2 否则

.....

若 x_n 是 \underline{A}_n 则 y 是 \underline{B}_n

小前提: x 是 \underline{A}'

结 论: y 是 \underline{B}'

其中 $\underline{A}_i \in F(X), i=1, 2, \dots, n, \underline{A}' \in F(X), \underline{B}_i, \underline{B}' \in F(Y), X, Y$ 是论域,上式可简记为:

$(\underline{A}_1) \rightarrow (\underline{B}_1)$ 否则

$(\underline{A}_2) \rightarrow (\underline{B}_2)$ 否则

.....

$(\underline{A}_n) \rightarrow (\underline{B}_n)$

\underline{A}'

(\underline{B}')

我们把形如“若 x 是 \underline{A} 则 y 是 \underline{B} 否则 \underline{C} ”的句型称为“模糊条件句”,上述多重模糊推理的大前提实际上是这种模糊条件句的扩展,称“多段模糊条件句”,它包含 n 个模糊推理句“ $(\underline{A}_i) \rightarrow (\underline{B}_i)$ ”,用“否则”连接,它们分别表示由 X 到 Y 的模糊关系 $\underline{R}_i(A_i; B_i)$ 。由于 $\underline{R}_i(A_i; B), i=1, 2, \dots, n$, 表示的 n 个模糊关系均是 $X \times Y$ 上的模糊关系,因此用“否则”连接起来的 n 个 $\underline{R}_i(A_i; B_i)$ 表示的多段模糊条件句所表达的总的模糊关系 \underline{R} 是这 n 个 \underline{R}_i 的连接。从连接词“否则”所表达的词义看,一般解释为并运算。这可由图 5.9 直观表示:

$$\underline{R} = \bigcup_{i=1}^n \underline{R}_i(A_i; B_i) \quad (5.53)$$

那么:

$$\underline{B}' = \underline{A}' \circ \underline{R} = \underline{A}' \circ \bigcup_{i=1}^n \underline{R}_i(A_i; B_i) \quad (5.54)$$

我们以二重情况即如下逻辑结构的推理为例来说明多重模糊推量的算法。

大前提:若 x 是 \underline{A} 则 y 是 \underline{B} 否则 y 是 \underline{C}

小前提: x 是 \underline{A}'

结 论: y 是 \underline{B}'

当我们选 $\underline{R} = \underline{R}_a = ((\underline{A} \times Y) \oplus (X \times \underline{B})) \cup ((\underline{A} \times Y) \oplus (X \times \underline{C}))$, 合成运算为“ $\vee - \wedge$ ”运算时有:

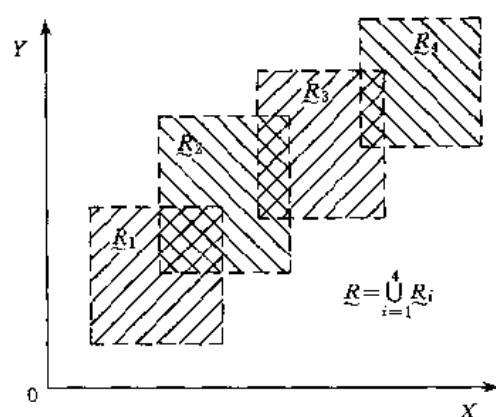


图 5.9 多重模糊推理句表示的模糊关系

$$\begin{aligned}
 \underline{B}'_a &= \underline{A}' \circ \underline{R}_a \\
 &= \underline{A}' \circ [(\underline{\bar{A}} \times \underline{Y}) \oplus (\underline{X} \times \underline{B})] \cup [(\underline{A} \times \underline{Y}) \oplus (\underline{X} \times \underline{C})] \\
 \mu_{\underline{B}'_a}(y) &= \bigvee_{x \in X} \{ \mu_{\underline{A}'}(x) \wedge [(1 \wedge (1 - \mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{B}}(y))) \vee \\
 &\quad (1 \wedge (\mu_{\underline{A}}(x) + \mu_{\underline{C}}(y)))] \} \quad (5.55)
 \end{aligned}$$

当我们选 $\underline{R} = \underline{R}_m = (\underline{A} \times \underline{B}) \cup (\underline{\bar{A}} \times \underline{C})$, 合成运算为“ $\vee - \wedge$ ”运算时有:

$$\begin{aligned}
 \underline{B}'_m &= \underline{A}' \circ \underline{R}_m \\
 &= \underline{A}' \circ [(\underline{A} \times \underline{B}) \cup (\underline{\bar{A}} \times \underline{C})] \\
 \mu_{\underline{B}'_m}(y) &= \bigvee_{x \in X} \{ \mu_{\underline{A}'}(x) \wedge [(\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)) \vee ((1 - \mu_{\underline{A}}(x)) \\
 &\quad \wedge \mu_{\underline{C}}(y))] \} \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

当选 $\underline{R} = \underline{R}_c$ 时, 合成运算为“ $\vee - \wedge$ ”时有:

$$\begin{aligned}
 \underline{B}'_c &= \underline{A}' \circ \underline{R}_c \\
 &= \underline{A}' \circ (\underline{A} \times \underline{B}) \cup (\underline{\bar{A}} \times \underline{C})
 \end{aligned}$$

可见它与 \underline{R}_m 时有相同的结果, 也得到式(5.56)的算法公式。

对于多重模糊推理, \underline{B}' 由式(5.54)求出, 对于 \underline{R}_c , 合成运算取“ $\vee - \wedge$ ”时, 有下式成立:

$$\begin{aligned}
 \underline{B}' &= \underline{A}' \circ \bigcup_{i=1}^n \underline{R}_i(A_i; B_i) \\
 &= \bigcup_{i=1}^n (\underline{A}' \circ \underline{R}_i(A_i; B_i)) \\
 &= \bigcup_{i=1}^n \underline{B}'_i \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

即 \underline{B}' 可由 $\underline{B}'_i = \underline{A}' \circ \underline{R}_i(A_i; B_i)$ 取并求得。

证明:

$$\mu_{\underline{B}'}(y) = \bigvee_{x \in X} \{ \mu_{\underline{A}'}(x) \wedge [\bigvee_{i=1}^n (\mu_{\underline{A}_i}(x) \wedge \mu_{\underline{B}_i}(y))] \}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{x \in X} \{ [\mu_{A'}(x) \wedge (\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y))] \vee [\mu_{A'}(x) \wedge \\
&\quad (\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_2}(y))] \vee \cdots \vee [\mu_{A'}(x) \wedge (\mu_{A_n}(x) \wedge \mu_{B_n}(y))] \} \\
&= \bigvee_{x \in X} \bigvee_{i=1}^n [\mu_{A'}(x) \wedge (\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y))] \\
&= \bigvee_{i=1}^n \bigvee_{x \in X} [\mu_{A'}(x) \wedge (\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y))]
\end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}' &= \bigcup_{i=1}^n (\tilde{A}' \circ R_i(A_i; B_i)) \\
&= \bigcup_{i=1}^n \tilde{B}'_i
\end{aligned}$$

证毕。

需要指出的是,多重模糊推理的大前提中的连接词“否则”在模糊逻辑运算中并不只是解释为取大的并运算,也可解释为其它的运算。到底解释为什么运算得到最佳的推理结果,与采用哪种模糊蕴涵定义及具体的应用场合有关。不少学者基于某种应用场合作过研究比较,采用不同的模糊蕴涵定义和不同的连接词否则的解释进行模糊推理,分别各自得到自己的结论,[15],[69],[70],[71]。这些结论并不完全一致。读者可以结合自己的实际应用情况进行研究比较和选择。

5.4.3 多重多维模糊逻辑推理

多重多维模糊逻辑推理是多维模糊逻辑推理和多重模糊逻辑推理的综合形式,其逻辑结构形式如下:

大前提: 若 x_1 是 \underline{A}_{11} 且 x_2 是 \underline{A}_{12} 且 \cdots 且 x_n 是 \underline{A}_{1n} 则 y 是 \underline{B}_1 否则

若 x_1 是 \underline{A}_{21} 且 x_2 是 \underline{A}_{22} 且 \cdots 且 x_n 是 \underline{A}_{2n} 则 y 是 \underline{B}_2 否则

.....

若 x_1 是 \underline{A}_{m1} 且 x_2 是 \underline{A}_{m2} 且 \cdots 且 x_n 是 \underline{A}_{mn} 则 y 是 \underline{B}_m

小前提: x_1 是 \underline{A}'_1 且 x_2 是 \underline{A}'_2 且 \cdots 且 x_n 是 \underline{A}'_n

结 论: y 是 \underline{B}'

它也可简记为:

(\underline{A}_{11}) 且 (\underline{A}_{12}) 且 \cdots 且 $(\underline{A}_{1n}) \rightarrow (\underline{B}_1)$ 否则

(\underline{A}_{21}) 且 (\underline{A}_{22}) 且 \cdots 且 $(\underline{A}_{2n}) \rightarrow (\underline{B}_2)$ 否则

.....

(\underline{A}_{m1}) 且 (\underline{A}_{m2}) 且 \cdots 且 $(\underline{A}_{mn}) \rightarrow (\underline{B}_m)$

(\underline{A}'_1) 且 (\underline{A}'_2) 且 \cdots 且 (\underline{A}'_n)

(\underline{B}')

其中 $\underline{A}_{ij}, \underline{A}'_j \in F(X_j), \underline{B}_i, \underline{B}' \in F(Y), i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n, X_j, Y$ 是论域。

多重多维模糊推理的大前提有 m 个用“否则”连接词连接起来的多维模糊推理句, 即,

Σ
L
H
?

$$(\underline{A}_{i1}) \text{ 且 } (\underline{A}_{i2}) \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } (\underline{A}_{in}) \rightarrow (\underline{B}_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

它表示 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times Y$ 上的一个模糊关系:

$$\underline{R}_i(\underline{A}_{i1}, \underline{A}_{i2}, \cdots, \underline{A}_{in}; \underline{B}_i)$$

$(\underline{A}_{i1}) \text{ 且 } (\underline{A}_{i2}) \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } (\underline{A}_{in})$ 为直积 $\underline{A}_{i1} \times \underline{A}_{i2} \times \cdots \times \underline{A}_{in}$, 把否则解释为并运算, 则:

$$\underline{B}' = (\underline{A}'_1 \times \underline{A}'_2 \times \cdots \times \underline{A}'_n) \circ \bigcup_{i=1}^m \underline{R}_i(\underline{A}_{i1}, \underline{A}_{i2}, \cdots, \underline{A}_{in}; \underline{B}_i) \quad (5.58)$$

当 \underline{R} 取 \underline{R}_i , “ \circ ” 取 “ $\vee - \wedge$ ” 运算时有:

$$\mu_{\underline{B}'}(y) = \bigvee_{x_1 \times \cdots \times x_n} \left[\left(\bigwedge_{j=1}^n \mu_{\underline{A}'_j}(x_j) \right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^m \left(\bigwedge_{j=1}^n \mu_{\underline{A}_{ij}}(x_j) \wedge \mu_{\underline{B}_i}(y) \right) \right) \right] \quad (5.59)$$

结合式(5.57)和式(5.51), 式(5.58)可以变为:

$$\begin{aligned} \underline{B}' &= (\underline{A}'_1 \times \underline{A}'_2 \times \cdots \times \underline{A}'_n) \circ \bigcup_{i=1}^m \underline{R}_i(\underline{A}_{i1}, \underline{A}_{i2}, \cdots, \underline{A}_{in}; \underline{B}_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^m [(\underline{A}'_1 \times \underline{A}'_2 \times \cdots \times \underline{A}'_n) \circ \underline{R}_i(\underline{A}_{i1}, \underline{A}_{i2}, \cdots, \underline{A}_{in}; \underline{B}_i)] \\ &= \bigcup_{i=1}^m \left[\bigcap_{j=1}^n (\underline{A}'_j \circ \underline{R}_{ij}(\underline{A}_{ij}; \underline{B}_i)) \right] \end{aligned} \quad (5.60)$$

那么:

$$\mu_{\underline{B}'}(y) = \bigvee_{i=1}^m \left\{ \bigcap_{j=1}^n \left[\bigvee_{x_j \in X_j} (\mu_{\underline{A}'_j}(x_j) \wedge \mu_{\underline{A}_{ij}}(x_j) \wedge \mu_{\underline{B}_i}(y)) \right] \right\} \quad (5.61)$$

这样在 \underline{R} 取 \underline{R}_i , “ \circ ” 取 “ $\vee - \wedge$ ” 运算时, 多重多维模糊推理可由式(5.61)计算, 即先按简单的基本形式计算, 然后再进行交、并运算, 而不必建立复杂的模糊关系。

5.5 真值限定的模糊推理方法

模糊推理的基本形式为:

$$\frac{(\underline{A}) \rightarrow (\underline{B})}{(\underline{A}')} \quad \underline{B}'$$

大前提表达了一个模糊关系 $\underline{R}(\underline{A}; \underline{B})$, 要先求出 $\underline{R}(\underline{A}; \underline{B})$, 然后才能合成得出结论。而真值限定的模糊推理方法则不管大前提的具体内容, 而是依据 (\underline{A}') 和 (\underline{A}) 的相容程度来推导 (\underline{B}') 。这类似在二值逻辑中, 推理不管命题的具体内容, 而是依赖于命题的真值。 (\underline{A}') 和 (\underline{A}) 的相容程度称为 (\underline{A}') 在 (\underline{A}) 限定下的语言真值, 记为 $T(\underline{A}/\underline{A}')$, $T(\underline{A}/\underline{A}')$ 可由下式求出:

$$T(\underline{A}/\underline{A}')(u) = \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x)=u} \mu_{\underline{A}'}(x), \quad \forall u \in [0, 1] \quad (5.62)$$

$T(\underline{A}/\underline{A}')$ 的含义是: 把 \underline{A} 作“真”的标准, 用 \underline{A} 来度量 \underline{A}' , 看 \underline{A}' 相当于 \underline{A} 的程度, 用语言真值给出。式(5.62)要求 $\mu_{\underline{A}}(x)$ 取遍 $[0, 1]$ 上的值。

有了 $T(\underline{A}/\underline{A}')(u)$, 再由模糊关系 \underline{R} 求出 \underline{B}' 在 \underline{B} 限定下的语言真值:

$$T(\underline{B}/\underline{B}')(v) = T(\underline{A}/\underline{A}')(u) \circ \mu_{\underline{R}}(u, v), \quad \forall v \in [0, 1] \quad (5.63)$$

这里的模糊关系 \underline{R} 与模糊逻辑推理基本形式中大前提表达的模糊关系 $\underline{R}(\underline{A}; \underline{B})$ 不同, 它

可以看成是 (\underline{A}) 的语言真值蕴涵 (\underline{B}) 的语言真值的模糊关系,即 (\underline{A}) 的语言真值 $\rightarrow(\underline{B})$ 的语言真值,是论域 $[0,1]\times[0,1]$ 上的模糊关系。 $\underline{R}(\underline{A};\underline{B})$ 是 $X\times Y$ 上的模糊关系,它要依赖于具体的 $\mu_{\underline{A}}(x),\mu_{\underline{B}}(y)$ 的形式,而这里的 \underline{R} 则与 $\mu_{\underline{A}}(x),\mu_{\underline{B}}(y)$ 的形式无关。 \underline{R} 可以根据不同的模糊蕴涵的定义,选取 $\underline{R}_a,\underline{R}_m,\underline{R}_c,\dots$ 等等各种形式。

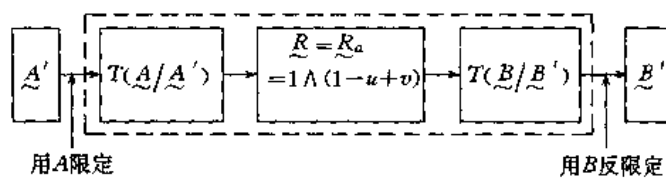


图 5.10 真值限定的模糊推理过程

有了 $T(\underline{B}/\underline{B}')$ 就可由 $T(\underline{B}/\underline{B}')$ 和 \underline{B} 导出 \underline{B}' :

$$\mu_{\underline{B}'}(y) = T(\underline{B}/\underline{B}')(y), \forall y \in Y \quad (5.64)$$

式(5.64)是真值限定的逆运算。

以上真值限定的模糊推理过程可以用图 5.10 表示。

图 5.10 中的虚线框内部分已经脱离了具体的大前提的内容,更具有抽象逻辑的特征,这是真值限定模糊推理方法的优点。

在一定条件下,真值限定的模糊推理方法与前面介绍的模糊逻辑推理的基本形式的算法在相同的前提下可得出相同的结论。

例 5.2 已知 $\underline{A}, \underline{A}' \in F(X), \underline{B} \in F(Y), X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ 且有若 x 是 \underline{A} 则 y 是 \underline{B} ,求 x 是 \underline{A}' , y 是多少?

$$\underline{A} = 0.1/x_1 + 0.6/x_2 + 1/x_3 + 0.6/x_4 + 0.1/x_5$$

$$\underline{B} = 0/y_1 + 0.2/y_2 + 0.8/y_3 + 1/y_4 + 0.7/y_5 + 0.2/y_6$$

$$\underline{A}' = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.5/x_3 + 0.1/x_4 + 0/x_5$$

解: 由 $T(\underline{A}/\underline{A}')(u) = \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x)=u} \mu_{\underline{A}'}(x)$

可得:
$$T(\underline{A}/\underline{A}')(0.1) = \bigvee_{\mu_{\underline{A}}(x)=0.1} (\mu_{\underline{A}'}(x_1), \mu_{\underline{A}'}(x_5)) = 0.5$$

同理:
$$T(\underline{A}/\underline{A}')(0.6) = 1$$

$$T(\underline{A}/\underline{A}')(1) = 0.5$$

故:
$$T(\underline{A}/\underline{A}')(u) = 0.5/0.1 + 1/0.6 + 0.5/1$$

\underline{R} 是 $\{0.1, 0.6, 1\} \times \{0, 0.2, 0.7, 0.8, 1\}$ 上的模糊关系,取 $\underline{R} = \underline{R}_a = 1 \wedge (1-u+v)$,有

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

那么:

$$T(\underline{B}/\underline{B}')(v) = T(\underline{A}/\underline{A}')(u) \circ \underline{R}$$

$$= (0.5, 1, 0.5) \circ \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (0.5, 0.6, 1, 1, 1) = 0.5/0 + 0.6/0.2 + 1/0.7 + 1/0.8 + 1/1$$

用 \underline{B} 反限定: $\mu_{\underline{B}'}(y) = T(\underline{B}/\underline{B}')(\mu_{\underline{B}}(y))$;

$$\mu_{\underline{B}'}(y_1) = T(\underline{B}/\underline{B}')(\mu_{\underline{B}}(y_1)) = T(\underline{B}/\underline{B}')(0) = 0.5$$

同理:

$$\mu_{\underline{B}'}(y_2) = T(\underline{B}/\underline{B}')(0.2) = 0.6$$

$$\mu_{\underline{B}'}(y_3) = T(\underline{B}/\underline{B}')(0.8) = 1$$

$$\mu_{\underline{B}'}(y_4) = T(\underline{B}/\underline{B}')(1) = 1$$

$$\mu_{\underline{B}'}(y_5) = T(\underline{B}/\underline{B}')(0.7) = 1$$

$$\mu_{\underline{B}'}(y_6) = T(\underline{B}/\underline{B}')(0.2) = 0.6$$

故:

$$\underline{B}' = (0.5, 0.6, 1, 1, 1, 0.6)$$

用模糊逻辑推理基本形式的算法求 B' 。

$$\underline{R}(A; B) = \underline{R}_a(A; B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 1 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 1 & 1 & 0.6 \\ 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}' = \underline{A}' \circ \underline{R}$$

$$= (0.5, 1, 0.5, 0.1, 0) \circ \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 1 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 1 & 1 & 1 & 0.6 \\ 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (0.5, 0.6, 1, 1, 1, 0.6)$$

若选 \underline{R}_c , 用真值限定方法:

$$T(\underline{A}/\underline{A}')(u) = (0.5, 1, 0.5)$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\underline{B}/\underline{B}')(v) = T(\underline{A}/\underline{A}')(u) \circ \underline{R}$$

$$= (0, 0.2, 0.6, 0.6, 0.6)$$

$$\underline{B}' = (0, 0.2, 0.6, 0.6, 0.6, 0.2)$$

用模糊逻辑推理的基本形式的算法:

$$\underline{R} = \underline{R}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{B}' &= \underline{A}' \circ \underline{R} = (0.5, 1, 0.5, 0.1, 0) \circ \underline{R} \\ &= (0, 0.2, 0.6, 0.6, 0.6, 0.2) \end{aligned}$$

5.6 不精确推理的其它方法

基于模糊逻辑的模糊推理是不精确推理的重要方法之一,除此之外人们还提出了其它一些不精确推理的方法,由于它们在自动化技术中尤其是在智能自动化技术中有着重要影响,作为本章的结束,也作一简单介绍。主要是基于概率论的主观 Bayes 方法和基于确定性理论的不精确推理,它们分别在著名的专家系统 PROSPECTOR 和 MYCIN 中得到成功的应用,有着很大的影响。

不精确推理一般要解决三个方面的问题:

- 证据的不确定性描述;
- 知识(规则)的不确定性描述;
- 推理过程中,不确定性的传递算法。

5.6.1 主观 Bayes 方法

主观 Bayes 方法由 R. O. Duda 等人于 1976 年提出,它是对概率论中基本 Bayes 公式的修正。

在概率论中 Bayes 分式描述如下:

若事件 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间的一个划分, $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$, A 是某一相关事件, $P(A) > 0$ 。若已知条件概率 $P(A/B_i)$, 则对任何 B_i 的逆概率 $P(B_i/A)$ 可由下式计算:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A/B_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

若把 B_i 解释为一组假设结论 $H_i, i = 1, 2, \dots, n$, 而把 A 解释为对实际情况的证据 E , 于是有:

$$P(H_i/E) = \frac{P(H_i E)}{P(E)} = \frac{P(H_i)P(E/H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(E/H_j)} \quad (5.65)$$

由于在实际应用中,每一事件 H_i 可以由大量统计数据中估计出 $P(H_i)$,称之为先验概率。而在 H_i 成立时也可统计出 E 发生的概率 $P(E/H_i)$,因而式(5.65)提供了一种由

这些数据反过来推算在证据 E 发生时各结论 H_i 发生的后验概率。例如,若 H_i 代表一组可能的疾病, E 代表疾病的症状,若已知各种疾病 H_i 发生的先验概率 $P(H_i)$ 及发生疾病 H_i 时的病症 E 的概率 $P(E/H_i)$ ($P(H_i)$ 和 $P(E/H_i)$ 均可从大量病例中统计得到),那么,现在对某病人观察到有症状 E ,就可用上述 Bayes 公式判断他得病 H_i 的概率。

主观 Bayes 方法是由基本 Bayes 公式发展而来。

1. 知识的不确定性描述

在主观 Bayes 方法中,每条推理规则表示为:

$$\text{IF } E \text{ THEN } H(LS, LN)$$

其中 E 为证据, H 为结论, LS, LN 为规则强度。 LS, LN 由专家给出,反映专家对规则的信任度, LS 表示规则充分性量度,即 E 存在对 H 的支持程度。 LN 表示规则的必要性量度,即 E 不存在对 H 的反对程度。可用概率表示 LS, LN :

$$LS = \frac{P(E/H)}{P(E/\bar{H})}$$

$$LN = \frac{P(\bar{E}/H)}{P(\bar{E}/\bar{H})}$$

LS, LN 刻划了规则的不确定性。

定义 $O(H)$ 和 $O(H/E)$ 为 H 的先验几率和后验几率(几率又称可能性):

$$O(H) = \frac{P(H)}{P(\bar{H})} = \frac{P(H)}{1 - P(H)}$$

$$O(H/E) = \frac{P(E/H)}{P(\bar{E}/H)} = \frac{P(H/E)}{1 - P(H/E)}$$

因为:

$$O(X) = \frac{P(X)}{1 - P(X)}, P(X) = \frac{O(X)}{1 + O(X)} \quad (5.66)$$

故 $O(X)$ 与 $P(X)$ 等价, $P(X) \in [0, 1]$, 对应 $O(X) \in [0, +\infty]$ 。

由 Bayes 公式(5.65)有:

$$\begin{aligned} O(H/E) &= \frac{P(H/E)}{P(\bar{H}/E)} = \frac{P(H)P(E/H)}{P(\bar{H})P(E/\bar{H})} \frac{P(E)}{P(\bar{E})} \\ &= \frac{P(H)P(E/H)}{P(\bar{H})P(E/\bar{H})} = \frac{P(E/H)}{P(E/\bar{H})} \frac{P(H)}{P(\bar{H})} \\ &= LS \cdot O(H) \end{aligned} \quad (5.67)$$

类似有:

$$O(H/\bar{E}) = LN \cdot O(H) \quad (5.68)$$

可见,当 $LS=1, O(H/E)=O(H)$, E 对结论没有影响; $LS>1, O(H/E)>O(H)$, E 支持结论 H ; 而 $LS<1, O(H/E)<O(H)$, E 反对结论 H 。 LN 对 $O(H/\bar{E})$ 有同样的影响。

E 和 \bar{E} 不可能同时支持或反对 H , 故一条规则中 LS, LN 只能是下列情况:

$$[(LS>1) \cap (LN<1)] \cup [(LS<1) \cap (LN>1)] \cup [(LS=1) \cap (LN=1)]$$

2. 证据的不确定性描述

主观 Bayes 方法中,证据的不确定性用 $P(E/E')$ 描述, E' 是对 E 的观察, $P(E/E')$ 是在观察 E' 下 E 的概率,当观察 E' 确认 E 为真时, $P(E/E')=1$; 当对 E 的观察 E' 确认 E

为假时, $P(E/E')=0$; 当对 E 的观察 E' 不能确定 E 为真或为假, 如“ E 有 80% 为真”, 记 $P(E/E')=0.8$ 。除了观察 E' 引起 E 的不确定性, 如果 E 是前续推理得到的不同结果, 它也具有不确定性。

3. 推理过程中不确定性的传递算法

由式(5.66), (5.67), (5.68)可得:

$$P(H/E) = \frac{LS \cdot P(H)}{(LS - 1)P(H) + 1} \quad (5.69)$$

$$P(H/\bar{E}) = \frac{LN \cdot P(H)}{(LN - 1)P(H) + 1} \quad (5.70)$$

在观察 E' 下, 结论 H 的概率 $P(H/E')$ 为:

$$\begin{aligned} P(H/E') &= P(H/E)P(E/E') + P(H/\bar{E})P(\bar{E}/E') \\ &= P(H/E)P(E/E') + P(H/\bar{E})(1 - P(E/E')) \end{aligned} \quad (5.71)$$

式(5.71)就是在不确定性证据 $P(E/E')$ 下结论的计算公式, 式中 $P(H/E)$, $P(H/\bar{E})$ 由式(5.69)和式(5.70)求出。

当观察 E' 证实 E 为真, 即 $P(E/E')=1$ 则:

$$P(H/E') = P(H/E) = \frac{LS \cdot P(H)}{(LS - 1)P(H) + 1} \quad (5.72)$$

当观察 E' 证实 E 为假, 即 $P(E/E')=0$, 则:

$$P(H/E') = P(H/\bar{E}) = \frac{LN \cdot P(H)}{(LN - 1)P(H) + 1} \quad (5.73)$$

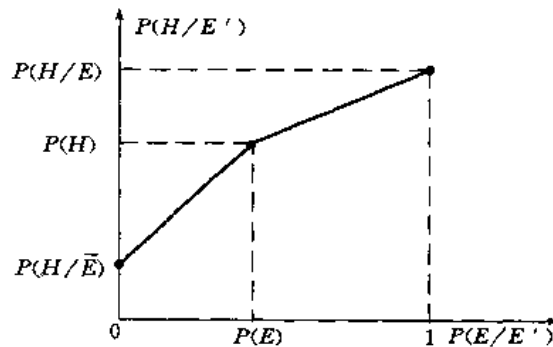


图 5.11 由三个特殊点的线性插值计算 $P(H/E')$

当观察 E' 对 E 不能起作用, 即不能提供支持或反对 E 的信息, $P(E/E')=P(E)$, 即 E 的先验概率, 此时:

$$\begin{aligned} P(H/E') &= P(H/E)P(E) + P(H/\bar{E})P(\bar{E}) \\ &= P(H) \quad (\text{全概率公式}) \end{aligned} \quad (5.74)$$

实际应用中先验概率 $P(H)$ 、 $P(E)$ 由专家给出。由专家给出的 $P(E)$ 、 $P(H)$ 代入式(5.74)及式(5.69)和式(5.70), 求得的 $P(H)$ 与原来专家给出的 $P(H)$ 常不一致。为了避免这种不一致引起的矛盾, 主观 Bayes 方法采用线性插值方法计算 $P(H/E')$ 。式(5.71)和式(5.74)给出了坐标平面 $P(E/E') \times P(H/E')$ 三个特殊点: $(1, P(H/E))$, $(0, P(H/\bar{E}))$ 和 $(P(E), P(H))$ 。

\bar{E})和 $(P(E), P(H))$,用这三个点间的线性插值,可计算 $P(H/E')$,如图 5.11 所示。 $P(H/E')$ 的线性插值公式如下:

$$P(H/E') = \begin{cases} P(H/\bar{E}) + \frac{P(H) - P(H/\bar{E})}{P(E)} P(E/E'), & 0 \leq P(E/E') < P(E) \\ P(H) + \frac{P(H/E) - P(H)}{1 - P(E)} (P(E/E') - P(E)), & P(E) \leq P(E/E') \leq 1 \end{cases} \quad (5.75)$$

应用主观 Bayes 方法推理,领域专家为每条规则提供规则强度 LS, LN ,同时给出证据和结论的先验概率 $P(E), P(H)$ 。原始证据的不确定性在系统运行时由用户提供,不确定性由原性证据的传播算法式(5.75)实现。

4. 组合证据下的不精确推理算法

若有 n 条规则有相同结论,即:

$$E_i \rightarrow H(LS_i, LN_i), i = 1, 2, \dots, n$$

E_i 相互独立,已知 $P(E_i/E')$,则结论 H 的后验几率由下式计算:

$$O(H/E') = \left[\prod_{i=1}^n \frac{O(H/E'_i)}{O(H)} \right] O(H) \quad (5.76)$$

式(5.76)代入式(5.66)即可求出 $P(H/E')$ 。

若规则是如下合取形式:

$$E = E_1 \text{ and } E_2 \text{ and } \dots \text{ and } E_n$$

可采用模糊集合论中的交运算计算组合证据 E 的不确定性:

$$\begin{aligned} P(E/E') &= \min_i (P(E_i/E'_i)) \\ &= \bigwedge_{i=1}^n P(E_i/E'_i) \end{aligned}$$

类似对于析取形式的规则:

$$E = E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \dots \text{ or } E_n$$

有:

$$\begin{aligned} P(E/E') &= \max_i (P(E_i/E'_i)) \\ &= \bigvee_{i=1}^n P(E_i/E'_i) \end{aligned}$$

在 PROSPECTOR 专家系统中,采用可信度 $C(E/E')$ 代替 $P(E/E')$,其对应关系为:

$$C(E/E') = \begin{cases} N * \frac{P(E/E') - P(E)}{P(E)}, & 0 \leq P(E/E') \leq P(E) \\ N * \frac{P(E/E') - P(E)}{1 - P(E)}, & P(E) < P(E/E') \leq 1 \end{cases}$$

取 $N=5$,如图 5.12。

用 $C(E/E')$ 代替式(5.75)中的 $P(E/E')$ 可得:

$$P(H/E') = \begin{cases} P(H/\bar{E}) + [P(H) - P(H/\bar{E})][C(E/E')/5 + 1], & C(E/E') \leq 0 \\ P(H) + [P(H/E) - P(H)]C(E/E')/5, & C(E/E') > 0 \end{cases} \quad (5.77)$$

式(5.77)中已不再出现 $P(E)$ 。当可信度 $C(E/E') > 0$, 表示观察 E' 增加对 E 的可信度。当 $C(E/E')$ 取最大值 5, 有 $P(E/E') = 1$, 说明观察使 E 为真。反之, 当 $C(E/E') < 0$, 则观察 E' 降低了对 E 的可信度, 当 $C(E/E') = -5$ 时, $P(E/E') = 0$, 则观察 E' 使 E 为假。

5.6.2 基于确定性理论的不精确推理方法

MYCIN 是著名的细菌感染病诊断专家系统, 它使用的不精确推理方法是由 Shortliffe 等人 1975 年提出的, 它以确定性理论为基础, 是不精确推理中最早、最简单方法之一, 有着很大的影响, 后来为许多系统采用。

早在 1950 年, Carnap 就提出, 当我们刻画所研究的模型时, 应考虑问题的确定性的性质, 他将确定性分为三类:

- 经典类: 证据 E 支持结论 H ;
- 类比类: E_1 比 E_2 更支持 H ;
- 定量类: E 在 X 程度上支持 H 。

在 MYCIN 系统中涉及的是定量类确定性问
题, 在讨论定量类的确定性时, 引入 $C[H, E]$, 它
表示在证据 E 的基础上, 确信结论 H 成立的程

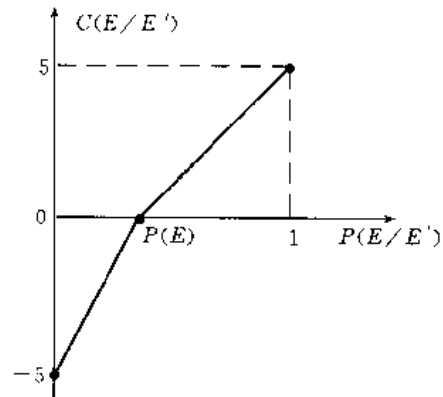


图 5.12 $C(E/E')$ 与 $P(E/E')$ 的对应关系

度。它不同于概率论中的条件概率 $P(H/E)$, 对 $P(H/E)$, 即在 E 条件下 H 成立的概率, 有 $P(H/E) = 1 - P(\bar{H}/E)$ 。而确定性理论中不认为 $C[H, E] = 1 - C[\bar{H}, E]$, 即证据 E 若以 α 的程度 ($\alpha \in [0, 1]$) 支持 H 成立, 并不认为 E 以 $(1 - \alpha)$ 的程度支持 H 的否定 \bar{H} 。如“若肝功能指标高于正常则有 0.4 概率患者患肝炎病”, 那么患者不患肝炎的概率为 0.6。但在确定性理论中, “若肝功能高于正常则在 0.4 的程度上支持患者患肝炎病”, 却不意味着在 0.6 的程度上支持患者不患肝炎病, 而是把支持不患肝炎病的程度认为是 0。

下面简要介绍 MYCIN 的不精确推理方法。

1. 知识的不确定性描述

为了表达知识的不确定性, MYCIN 引入了确定性因子或称可信度因子 CF (Certainty Factor) 并用它表达规则的不确定性:

$$\text{IF } E \text{ THEN } H \quad (CF[H, E])$$

$CF[H, E]$ 亦称规则强度, $CF[H, E]$ 定义为:

$$CF[H, E] = MB[H, E] - MD[H, E] \quad (5.78)$$

其中 $MB[H, E]$ 表示因证据 E 出现对结论 H 的信任增长度, $MD[H, E]$ 表示证据 E 出现对结论 H 的不信任增长度。

$MB[H, E]$ 和 $MD[H, E]$ 用概率表示为:

$$MB[H, E] = \frac{P(H/E) - P(H)}{1 - P(H)} \quad (5.79)$$

$$MD[H, E] = \frac{P(H) - P(H/E)}{P(H)} \quad (5.80)$$

式(5.79)表示,若 $P(H/E) > P(H)$ 即 E 的出现使 H 成立的概率增加, $P(H/E) - P(H)$ 表示 H 成立概率的增量,而 $1 - P(H)$ 表示 H 不成立的先验概率,这两个值的比率定义为 $MB[H, E]$ 。同样, MD 定义为 E 的出现使 H 成立的概率的减量与 H 成立的先验概率之比。

实际上,一个证据 E 的出现不可能同时增加对 H 的信任又增加对 H 的不信任, $MB[H, E]$ 和 $MD[H, E]$ 不可能同时大于 0,这可由式(5.79)和式(5.80)反映出。但当 $MB[H, E] > 0$ 时,MYCIN 定义 $MD[H, E]$ 为 0,反之亦然。因此 $MB[H, E]$ 和 $MD[H, E]$ 的完整定义为:

$$MB[H, E] = \begin{cases} 1, & P(H) = 1 \\ \frac{\max(P(H/E), P(H)) - P(H)}{\max(0, 1) - P(H)}, & P(H) \neq 1 \end{cases} \quad (5.81)$$

$$MD[H, E] = \begin{cases} 0, & P(H) = 0 \\ \frac{\min(P(H/E), P(H)) - P(H)}{\min(0, 1) - P(H)}, & P(H) \neq 0 \end{cases} \quad (5.82)$$

$CF[H, E] = MB[H, E] - MD[H, E]$, 将 $MB[H, E]$ 与 $MD[H, E]$ 综合,考虑了信任和不信任两种情况,有下述性质:

$$(1) 0 \leq MB[H, E] \leq 1, 0 \leq MD[H, E] \leq 1$$

故: $-1 \leq CF[H, E] \leq 1$

$$(2) \text{ 当 } MB[H, E] > 0, \text{ 则 } MD[H, E] = 0$$

故: $CF[H, E] = MB[H, E] > 0$

$$(3) \text{ 当 } MD[H, E] > 0, \text{ 则 } MB[H, E] = 0$$

故: $CF[H, E] = -MD[H, E] < 0$

$$(4) \text{ 当 } P(H/E) = 1, \text{ 则 } MB[H, E] = 1, MD[H, E] = 0$$

故: $CF[H, E] = 1$

$$(5) \text{ 当 } P(H/E) = 0, \text{ 即 } P(H/E) = 0$$

则: $MB[H, E] = 0, MD[H, E] = 1$

故: $CF[H, E] = -1$

$$(6) \text{ 当 } P(H/E) = P(H) (P(H) \neq 1), \text{ 即 } E \text{ 不影响 } H,$$

则: $MB[H, E] = 0, MD[H, E] = 0$

故: $CF[H, E] = 0$

以上性质可由图 5.13 表示。

在实际应用中, $CF[H, E]$ 并不是由 $P(H/E), P(H)$ 计算而来,而一般是由领域专家确定。

2. 证据的不确定性描述

在 MYCIN 中证据 E 的不确定性也由证据的可信度因子 $CF[E]$ 来描述, $CF[E] \in [-1, 1]$ 当确认 E 为真时, $CF[E] = 1$; 当确认 E 为假时, $CF[E] = -1$; 当确认 E 在某种程度上为真时, $CF[E] > 0$ 。

原始证据的 $CF[E]$ 可以按定义由概率统计给出,但一般情况下则由用户凭经验提

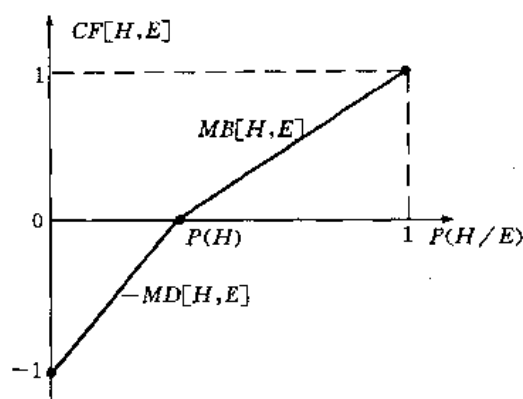


图 5.13 规则强度 $CF[H, E]$ 的性质

供。而中间证据则由不精确推理的不确定性传播算法求出。

3. 不确定性传递算法

设规则 IF E THEN H 的可信度因子为 $CF[H, E]$, $CF[H, E] = MB[H, E] - MD[H, E]$, 而证据的可信度为 $CF[E]$ 时, 则规定:

$$MB[H] = MB[H, E] \max(0, CF[E])$$

$$MD[H] = MD[H, E] \max(0, CF[E])$$

$$CF[H] = CF[H, E] \max(0, CF[E])$$

可见当 $CF[H] = 1$ 时, $CF[H] = CF[H, E]$; 当 $CF[E] > 0$ 时, $CF[H] = CF[H, E]$, $CF[E]$; 而当 $CF[E] \leq 0$ 时, $CF[H] = 0$ 。

4. 组合证据下不确定性的传递算法

当 E 为多个证据的合取, 即:

$$E = E_1 \text{ and } E_2 \text{ and } \cdots \text{ and } E_n$$

则有:

$$MB[E] = \min_i (MB[E_i])$$

$$= \bigwedge_{i=1}^n MB[E_i]$$

$$MD[E] = \min_i (MD[E_i])$$

$$= \bigwedge_{i=1}^n MD[E_i]$$

因此:

$$CF[E] = MB[E] - MD[E]$$

$$= \min_i (CF[E_i])$$

$$= \bigwedge_{i=1}^n CF[E_i]$$

当 E 为多个证据的析取, 即:

$$E = E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \cdots \text{ or } E_n$$

则有:

$$MB[E] = \max_i (MB[E_i])$$

$$= \bigvee_{i=1}^n MB[E_i]$$

$$MD[E] = \max_i (MD[E_i])$$

$$= \bigvee_{i=1}^n MD[E_i]$$

同样有:

$$CF[E] = \max_i (CF[E_i])$$

$$= \bigvee_{i=1}^n CF[E_i]$$

当有不同多个规则推出同一结论,即:

$$R_i: \text{IF } E_i \text{ THEN } H (CF[H, E_i])$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

先分别按每条规则计算:

$$CF_i[H] = CF[H, E_i] \max(0, CF[E_i])$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

然后按下面的公式计算两条规则的综合:

$$CF_{12}[H] = \begin{cases} CF_1[H] + CF_2[H] - CF_1[H]CF_2[H], \\ \quad CF_1[H] \& CF_2[H] \geq 0 \\ CF_1[H] + CF_2[H] + CF_1[H]CF_2[H], \\ \quad CF_1[H] \& CF_2[H] < 0 \\ CF_1[H] + CF_2[H], \text{其它情况} \end{cases} \quad (5.83)$$

反复使用(5.83)式则最后求得 $CF[H]$ 。计算当中结合两个以上的规则时与结合的顺序无关。而且 $CF[H]$ 始终保持在 $[-1, 1]$ 区间。

和主观 Bayes 方法相比,虽然基于确定性理论的 MYCIN 推理方法不是建立在严格的理论推导基础上,但它却避免了专家给出很多先验概率的困难,特别是涉及一些不常出现但却非常重要的事件时更会如此,也许他们更愿意给出可信度 CF 。

第六章 模糊控制

1974年英国学者 E. H. Mamdani 首先用模糊控制语句组成模糊控制器,并把它成功地运用于锅炉和蒸汽机的控制。这一开拓性的工作,标志着模糊控制理论和技术的诞生。二十多年来,模糊控制不论从理论和技术上都得到长足的发展,成为自动控制领域中一个非常活跃而又硕果累累的一个分支。

在模糊控制诞生后的最初几年里,这一新的控制思想吸引了各国学者,他们纷纷在各种应用领域尝试这一新的控制方法并取得了令人振奋的成果。英国的 King 和 Mamdani 利用模糊控制器控制一个反应炉搅拌池的温度,荷兰学者 Kickert 等利用模糊控制器解决了热交换过程中非线性、时滞和非对称性增益等问题的控制,收到了最佳 PI 控制的效果。英国钢铁公司一工厂用模糊控制器对原料渗透率进行控制,比人工控制偏差减少了 40%。英国学者 Tong 对压力容器内的液面和压力进行模糊控制,有效地克服了非线性、强耦合等控制难点,取得了较好的控制效果。1977年英国的 Pappis 等采用模糊控制对十字路口的交通流量进行管理和控制,使平均等待时间减少 7%。1979年丹麦 SMIDTH 公司成功地将模糊技术用于水泥生产窑的控制。

1979年,英国的 T. J. Procyk 和 E. H. Mamdani 研究了一种自组织模糊控制器,它能在控制过程中不断地调整和修改控制规则,因而使控制系统的性能不断完善。这正像人类在控制过程中不断地深化了解和掌握控制规律一样,具有自学习、自适应的能力。自组织模糊控制器的出现,标志着模糊控制器由低级向高级阶段发展的开始。利用人工智能技术和方法,研究具有自学习自适应能力的模糊控制器,进一步提高它的“智能”水平,一直是人们努力的一个方向。自组织(或称自适应)模糊控制器,专家模糊控制器,神经网络模糊控制器等等都是人们在这一方向上不断探索的研究成果。

1985年在 AT & T 贝尔实验室工作的户贝、渡边首先开发出实现模糊推理功能的 VLSI 芯片。从而促进了用硬件实现的模糊控制器的发展,给模糊控制带来了新的生气。日本的许多公司如立石电机公司、日新电机公司、奥井电机公司等等都有用硬件实现的模糊控制器产品。

日本在模糊控制方面一直走在前列并注重实用技术的开发。1987年仙台市营地铁模糊控制运行成功。从 1989年到 1991年以“聪明的模糊”、“伶俐的模糊”为副标题的家电制品广告家喻户晓,人人皆知,呈现出非模糊家电产品不好卖的“模糊热”。这股“模糊热”后来又波及南朝鲜、台湾、香港等地区,也影响到西德等国家。

从 70年代末开始,我国学者也在模糊控制理论及应用方面积极开展研究工作,理论研究的论文和实际应用的例子屡见报导。尤其计算机控制系统硬件的不断成熟和价格下降,必将进一步促进我国模糊控制在工业生产过程控制、家电自动化以及其它各个方面的应用得到更大发展。

尽管模糊控制已经取得令人振奋的研究成果,但由于它的发展历史还不长,因此其理

论上的系统性和完善性,其技术上的成熟性和规范性还都是不够的,有待人们进一步地研究提高。

本章从模糊控制的原理,模糊控制器的设计,模糊控制技术的发展与应用等各个方面介绍模糊控制技术。

6.1 模糊控制的工作原理

6.1.1 模糊控制的基本思想

控制理论的发展和数学有着密切的关系,尤其是现代控制理论的发展,这种关系就更为密切。无论是采用经典控制理论还是采用现代控制理论去设计一个自动控制系统,都需要事先建立被控对象的数学模型,要知道模型的结构、阶次、参数等等。在此基础上合理地选择控制策略,进行控制器的设计。然而大量的实践告诉我们,在许多情况下,被控制对象由于其过程复杂,机理有不明之处,缺乏必要的检测手段或者测试装置不能进入被测试区域等等各种原因,致使无法建立被控过程的数学模型。这种对象有人称为“黑盒子”、“灰盒子”。比如,制药和食品工业生产中的发酵过程,化工生产过程中的聚合反应过程,建材工业生产中的水泥窑、玻璃窑及各种窑炉的燃烧过程等等,诸如此类过程机理均较复杂,不单单是物理过程,往往还具有化学过程乃至生化过程,这些过程在正常进行情况下已经是比较复杂,而且往往又具有特殊的情况使过程更为复杂。如聚合反应过程的正常反应阶段之前一般要经历一段诱导期,这个阶段化学反应极不稳定,过程行为大幅度变化。又如,燃煤工业锅炉因为煤质情况等不同造成燃烧情况、炉排结焦情况不同,燃烧过程差异很大。青霉素发酵过程,是青霉素菌二次代谢的生化过程,机理非常复杂,而青霉素菌又经历生长期、生产期、衰老期等不同的生命阶段,代谢能力差异很大,使得发酵过程更为复杂。这类过程的变量多,过程往往具有非线性,强耦合等特点,各种参数也往往存在时变性。因此要建立这类过程的数学模型非常困难,甚至是不可能。虽然我们已经有了解决非线性、时变参数系统的方法,但是有些场合因为许多因素结合在一起,使问题解法复杂化以致缺乏实用价值。因此用经典控制理论和现代控制理论来解决这类对象的控制往往难以奏效,得不到满意的控制效果。

与此相反,对这类常规办法难以控制的对象,有经验的操作人员进行手动控制,却往往可以收到较为满意的控制效果。

模糊数学的创造人,控制论专家 Zadeh 教授曾举过一个很有说服力的例子,一个汽车停车过程控制的例子。

假若停车场上已经停满了很多汽车,现在要把一辆汽车停到刚好可以放下它的两辆汽车中间的空隙中去。

用控制理论的方法解决这个问题,首先应建立停车过程的数学模型即汽车的状态方程,它涉及到多个变量,包括汽车的位置,汽车车身的方向,汽车的速度,前轮的角度等,汽车在拥挤的停车场开动又不能与其它汽车相撞,因此汽车与周围其它汽车之间的距离又构成一组约束,停车过程即在这组约束下控制汽车由初始状态转移至最终停放的状态。采用数学模型精确地求解停车问题,由于有较多的约束条件和变量,因此并不是很容易的。

而一个老练的汽车司机凭着自己的经验,进进退退,不断调整方向盘,进退几次就能在拥挤的汽车中把汽车停到空隙中去。他没有建立什么状态方程,更谈不上精确地计算,而是根据不甚精确的观察,根据脑子里停车的经验规则,执行一些不精确的控制,就达到了满意的停车位置。

由 Zadeh 给出的这个停车控制的例子以及我们前面列举过的那些难于用控制理论的方法进行建模控制而有经验的操作人员却往往可以控制的工业生产过程的例子,人们不禁会引起这样的思考:对这一类被控过程,能否不用传统的方法而是让计算机模拟人的思维方式,按着人的操作规则去进行控制呢?问题的答案是肯定的,模糊控制正是源于这种朴素的思想。

模糊控制的基本思想就是利用计算机来实现人的控制经验。而人的控制经验一般是由语言来表达的,这些语言表达的控制规则又带有相当的模糊性。如人工控制水槽水位的经验可以表达为:

- (1) 若水槽无水或水较少时,则开大水阀;
- (2) 若水位和要求的水位相差不太大,则把水阀关小;
- (3) 若水位快接近要求的水位,则把阀门关得很小;

.....

这些经验规则中,“较少”、“不大大”、“接近”、“开大”、“关小”、“关得很小”这些表示水位状态和控制阀门动作的概念都带有模糊性,这些规则的形式正是模糊条件语句的形式,可以用模糊数学的方法来描述过程变量和控制作用的这些模糊概念及它们之间的关系,又可以根据这种模糊关系及某时刻过程变量的检测值(需化成模糊量)用模糊逻辑推理的方法得出此时刻的控制量。这正是模糊控制的基本思路。

由于模糊控制器的模型不是由数学公式表达的数学模型,而是由一组模糊条件语句构成的语言形式,因此从这个角度上讲,模糊控制器又称模糊语言控制器。

由于模糊控制器的模型是由带有模糊性的有关控制人员和专家的控制经验和知识组成的知识模型,是基于知识的控制,因此模糊控制属于智能控制的范畴。

因此可以说,模糊控制是以人的控制经验作为控制的知识模型,以模糊集合、模糊语言变量以及模糊逻辑推理作为控制算法的数学工具,用计算机来实现的一种智能控制。

6.1.2 模糊控制系统

模糊控制系统的框图如图 6.1 所示。

由图 6.1 可见,模糊控制系统的结构与一般的计算机数字控制系统基本类似,只是它的控制器为模糊控制器。它也是一个计算机数字控制系统,控制器由计算机实现,需要 A/D, D/A 转换接口,以实现计算机与模拟环节的连接。它也是一个闭环反馈控制系统,被控制量要反馈到控制器,与设定值相比较,根据误差信号进行控制。

模糊控制系统由以下几个部分组成:模糊控制器、输入输出接口、检测装置、执行机构和被控对象。

1. 被控对象

被控对象是一种设备或装置或是若干个装置或设备组成的群体,它们在一定的约束

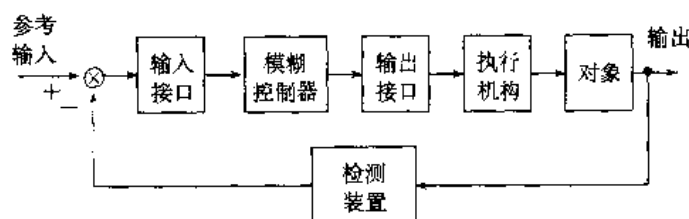


图 6.1 模糊控制系统框图

下工作以实现人们的某种目的。工业上典型的被控对象是各种各样的生产设备实现的生产过程,它们可能是物理过程,化学过程或是生物化学过程。从数学模型的角度讲,它们可能是单变量或多变量的,可能是线性的或非线性的,可能是定常的或时变的,可能是一阶的或高阶的,可能是确定性的或是随机过程,当然也可能是混合有多种特性的过程。正如前文所述,有不少对象是难以建模的。对于难以建立精确数学模型的复杂对象,对于非线性性和时变对象,模糊控制策略是较为适宜采用的一种方案。

2. 检测装置

检测装置一般包括传感器和变送装置。它们检测各种非电量如温度、流量、压力、液位、转速、角度、浓度、成份等并变换放大为标准的电信号,包括模拟的或数字的等形式。在某些场合,检测量也可能是电量。

与一般的自动控制系统一样,模糊控制需要能够提供实时数据的在线检测装置,对于有较大滞后的各种离线的分析仪器,往往不能满足模糊控制实时性的要求。

检测装置的精度级别应该高于系统的精度控制指标,这在模糊控制系统中同样适用,但是,一般认为在以高精度为目标的控制系统中不宜采用模糊控制方案,因此在模糊控制系统中检测装置的精度应视具体控制指标的要求具体确定。

3. 执行机构

执行机构是模糊控制器向被控对象赖以施加控制作用的装置,如工业过程控制中应用最普遍最典型的各种调节阀。执行机构实现的控制作用常常表现为使角度、位置发生变化,因此它往往是由伺服电动机、步进电动机、气动调节阀、液压阀等加上驱动装置组成。

4. 输入输出接口

输入输出接口是实现模糊控制算法的计算机与控制系统连接的桥梁,由图 6.1,输入接口主要与检测装置连接,把检测信号转换为计算机所能识别处理的数字信号并输入给计算机。输出接口把计算机输出的数字信号转换为执行机构所要求的信号,输出给执行机构对被控对象施加控制作用。

由于大部分检测装置和执行机构的信号都是模拟信号,因此输入输出接口常常是模数转换电路(A/D)和数模转换电路(D/A)。

5. 模糊控制器

模糊控制器是模糊控制系统的核心,也是模糊控制系统区别于其它自动控制系统的主要标志。模糊控制器一般由计算机实现,用计算机程序和硬件实现模糊控制算法,计算机可以是单片机,IPC,工业控制机等各种类型的微型计算机,程序设计语言可以是汇编

语言, C 语言及其它各种语言。现在也有一些模糊芯片实现模糊逻辑推理算法, 成为模糊控制器的重要组成部分。

6.1.3 模糊控制器

模糊控制器(FC—Fuzzy Controller)又称为模糊逻辑控制器(FLC—Fuzzy Logic Controller)。因为模糊控制规则用模糊条件语句来描述, 是一种语言型控制器, 因此, 从这个角度上讲, 有时也称为模糊语言控制器。

模糊控制器的结构如图 6.2 所示, 从功能上划分, 它主要由四个部分组成: 模糊化接口, 知识库、推理机以及解模糊接口, 这四个部分的功能和工作原理下面分别介绍。

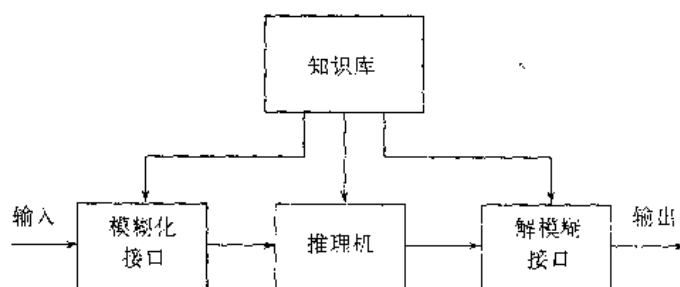


图 6.2 模糊控制器结构

6.1.3.1 模糊化接口(Fuzzification Interface)

人作为操作者去控制一个被控对象, 比如通过调节蒸汽和冷水的流量控制水箱的水温在 80°C 。人通过感官从检测仪表观察的被控对象的输出信息在客观上是精确量, 比如水箱水温的显示仪表显示的温度值为 89°C , 但是反映到人的大脑中这一精确量则转化为“温度太高了”这种带有模糊性的模糊量, 因为人的大脑中的控制经验是由“如果水温太高则把蒸汽阀关死, 冷水阀开大”这种模糊条件语句构成的模糊控制规则, 由精确量到模糊量的转化过程称为模糊化。

计算机仿照人的思维进行模糊控制, 模糊控制器由输入通道得到的采样值也是精确量, 而推理机制进行的模糊推理也是运用输入量的模糊值(模糊子集)和输入输出间的模糊关系进行模糊推理, 因此也需要一个把输入量由精确量转化为模糊子集的过程, 即模糊化过程。

模糊化接口的功能概括为以下两个方面:

1. 量程转换

把输入信号的数值映射到相应的输入论域上。

输入信号有一定的物理范围, 比如水温与其设定值的误差信号的量程范围可能是 $-12^{\circ}\text{C} \sim +12^{\circ}\text{C}$, 即 $[-12, 12]$, 而每一输入信号都有一相应的论域, 在该论域上定义模糊化后表示信号大小的模糊子集。论域有两种形式, 即离散的或连续的。比如水温误差的论域可能定义为 $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (离散形式), 也可能定义为 $[-10, 10]$ (连续形式)。论域也有一个数值范围, 水温误差离散论域为 -5 到 $+5$ 共 11 个离散点。量程转换要把输入信号的物理范围转化成相应的论域。在每一个采样时刻, 模糊化接口把

输入信号的物理值转化到相应论域上的点,比如水温误差为 7.2°C ,那么转换到相应离散论域上则为点+3。

2. 模糊化

即把精确量转化为模糊量。输入信号映射到相应论域上的一个点后,把它转化为该论域上的一个模糊子集。

6.1.3.2 知识库(Knowledge Base)

知识库包含应用领域方面的知识,主要有数据库和规则库组成。

1. 数据库

数据库提供所有必要的定义。所有输入、输出变量所对应的论域以及这些论域上所定义的规则库中所使用的全部模糊子集的定义都存放在数据库中。如果论域是离散形式,则模糊子集在数据库中存放的是它在各个离散点上的隶属度;如果论域是连续的,模糊子集在数据库中存放它的隶属函数。在模糊控制器推理过程中,数据库向推理机提供必要的数
据。在模糊化接口和解模糊接口进行模糊化和解模糊时,数据库也向它们提供相关论域的
必要数据。

2. 规则库

规则库存放模糊控制规则。模糊控制规则基于手动操作人员长期积累的控制经验和领域专家的有关知识,它是对被控对象进行控制的一个知识模型(不是数学模型)。这个模型建立的是否准确,也就是是否准确地总结了操作人员的成功经验和领域专家的知识,将决定模糊控制器控制性能的好坏。

控制规则的表达式也是按人的直觉推理的语言表示形式,正如我们前面曾举例说明过的,是一种模糊条件语句的形式。例如,一般的模糊控制器考虑被控对象输出与设定值的误差及误差变化率两种输入作用,它们对应的语言变量分别记为 x 和 y ,模糊控制器输出作用对应的语言变量记为 z 。 x, y, z 的语言值的集合亦称辞集,分别设为:

$$x: \{A_i | i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$y: \{B_j | j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$z: \{C_{ij} | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$$

那么模糊控制规则可以表达为如下形式:

若 x 是 A_1 且 y 是 B_1 则 z 是 C_{11} 否则

若 x 是 A_1 且 y 是 B_2 则 z 是 C_{12} 否则

.....

若 x 是 A_1 且 y 是 B_n 则 z 是 C_{1n} 否则

若 x 是 A_2 且 y 是 B_1 则 z 是 C_{21} 否则

.....

若 x 是 A_2 且 y 是 B_n 则 z 是 C_{2n} 否则

.....

若 x 是 \underline{A}_m 且 y 是 \underline{B}_1 则 z 是 \underline{C}_{m1} 否则

.....

若 x 是 \underline{A}_m 且 y 是 \underline{B}_n 则 z 是 \underline{C}_{mn} (6.1)

式(6.1)所表示的规则,是一个用“否则”连接的多段模糊条件语句,共有 $m \times n$ 段,而每一段则是用“且”连接前件的二维模糊推理句。

一般情况下,若模糊控制器有 n 个输入: x_1, x_2, \dots, x_n , 有 p 个互相独立的控制输出: z_1, z_2, \dots, z_p , 共有 m 条控制规则,那么规则形式可表示为:

若 x_1 是 \underline{A}_{11} 且 x_2 是 \underline{A}_{12} 且 \dots 且 x_n 是 \underline{A}_{1n} 则 z_1 是 \underline{C}_{11} , z_2 是 \underline{C}_{12} , \dots , z_p 是 \underline{C}_{1p} 否则

若 x_1 是 \underline{A}_{21} 且 x_2 是 \underline{A}_{22} 且 \dots 且 x_n 是 \underline{A}_{2n} 则 z_1 是 \underline{C}_{21} , z_2 是 \underline{C}_{22} , \dots , z_p 是 \underline{C}_{2p} 否则

.....

若 x_1 是 \underline{A}_{m1} 且 x_2 是 \underline{A}_{m2} 且 \dots 且 x_n 是 \underline{A}_{mn} 则 z_1 是 \underline{C}_{m1} , z_2 是 \underline{C}_{m2} , \dots , z_p 是 \underline{C}_{mp} (6.2)

实际应用中,输入输出模糊语言变量的辞集,也就是相应输入输出论域的模糊子集,常常用有标识性的符号标记,如 NB(负大)、NM(负中)、NS(负小)、NO(负零)、ZO(零)、PO(正零)、PS(正小)、PM(正中)、PB(正大)等来表示。模糊控制的创始人 Mamdani 这样使用之后沿用至今。当然这也不是唯一的表示形式。

表 6.1 是一个典型的模糊控制规则表,它表示了 $8 \times 7 = 56$ 条模糊条件语句:

表 6.1 模糊控制规则表

误差的变化: EC

		NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
误差 ： E	NB	PB					PM	ZO
	NM	PB					PM	ZO
	NS	PM	PM			ZO	NS	
	NO		PS	ZO	NS	NM		
	PO	PSP	ZO	NM				
	PB			NM				
	PM	ZO	NM	NB				
	PB			NB				

(1) 若 E 是 NB 且 EC 是 NB 则 U 是 PB 否则

(2) 若 E 是 NB 且 EC 是 NM 则 U 是 PB 否则

.....

(56) 若 E 是 PB 且 EC 是 PB 则 U 是 NB

6.1.3.3 推理机(Inference Mechanism)

推理机采用某种模糊推理方法,由采样时刻的输入和模糊控制规则推导出模糊控制

器的控制输出。

一般来讲,模糊控制器中使用的推理机制比典型的专家系统中的推理要简单,因为在模糊控制器中一条规则的结论是不会作为另一条规则的前件来使用的,控制作用是基于一级的数据驱动的前向推理,即肯定前件式 GMP。

推理机由每个采样时刻的输入,依据模糊控制规则推导出控制作用,而模糊控制规则这一组模糊条件语句可以导出一个输入输出空间上的模糊关系,推理机按着模糊推理的合成规则进行运算从而求得控制作用。这一推理机制可由图 6.3 表示。

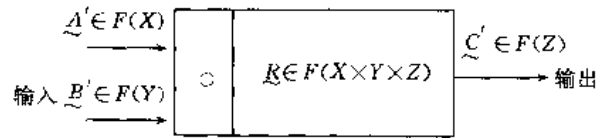


图 6.3 推理机制

图 6.3 是依据式(6.1)所举的一个两输入单输出的模糊控制器的情况,图中的“ R ”表示由式(6.1)所列的规则库的控制规则导出的输入和输出之间的模糊关系,“ \circ ”表示模糊推理合成规则的合成运算。模糊关系 $R \in F(X \times Y \times Z)$ 可以看成是一个转换器,当输入为 A' 且 B' 时,转换为输出 C' 。

由 5.4 节模糊推理的扩充形式不难得出,对于由式(6.1)这组模糊条件语句组成的多段模糊条件语句,其中的每一段即每一个语句所表示的模糊关系 R_{ij} 为:

$$R_{ij} = R_{ij}((A_i) \text{ 且 } (B_j) \rightarrow (C_{ij})) = R_{ij}(A_i, B_j; C_{ij}) \quad (6.3)$$

总的模糊关系为:

$$R = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n R_{ij}(A_i, B_j; C_{ij}) \quad (6.4)$$

若某时刻的输入为 A' 和 B' , 由推理合成规则输出 C' 为:

$$C' = (A' \times B') \circ R = (A' \times B') \circ \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n R_{ij}(A_i, B_j; C_{ij}) \quad (6.5)$$

若采用 Mamdani 的推理算法则:

$$C'(z) = \bigvee_{x \in X, y \in Y} (A'(x) \wedge B'(y) \wedge R(x, y, z)), \quad \forall z \in Z \quad (6.6)$$

式(6.6)中:

$$R(x, y, z) = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n (A_i(x) \wedge B_j(y) \wedge C_{ij}(z)) \quad (6.7)$$

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall z \in Z$$

当论域 X, Y, Z 为离散的有限论域时,模糊关系 R 可用模糊矩阵来表示:

$$R = [r_{ijk}]_{p \times q \times s}$$

p, q, s 表示论域 X, Y, Z 所含元素的个数,即

$$X = \{x_i | i = 1, 2, \dots, p\}$$

$$Y = \{y_j | j = 1, 2, \dots, q\}$$

$$Z = \{z_k | k = 1, 2, \dots, s\}$$

式(6.5)就是模糊控制器采用的模糊推理的合成规则。对于模糊关系 \tilde{R} , 采用不同的模糊蕴涵式的定义, 就可以相应得到不同的推理算法。另外, 模糊推理的合成运算“ \circ ”, 也可以采用“ $\vee - \wedge$ ”以外的其它合成算子对, 因此也可以得出不同的推理算法。

各种推理算法都可以依据规则库由(6.4)式先求出模糊关系 \tilde{R} , 然后由(6.5)式进行推理求得控制输出。但是当论域 X, Y, Z 含有较多元素时, \tilde{R} 变得较庞大, 给存储、计算带来不便。因此模糊控制算法常常采用简捷的方法进行合成运算。

6.1.3.4 解模糊接口(Defuzzification Interface)

与模糊化相反, **解模糊**是由模糊量到精确量的转化过程。

计算机在执行模糊控制算法时, 它从模糊推理中得到的模糊控制作用必须转化为执行机构所能接受的精确量。

解模糊化接口主要有两个功能:

1. 量程转换

量程转换把输出作用的论域转化为输出物理量的变化范围, 在运行时解模糊求得的输出论域上的点转化为输出的物理量的值。

2. 解模糊

由推理机得到的模糊的控制作用转化为一个精确的控制量, 它是输出论域上的一个点。

解模糊的策略有最大隶属度法, 取中位数法, 重心法(加权平均法)等等。

6.1.4 模糊控制工作原理示例

为了更具体地说明模糊控制的工作原理, 我们举一简单的例子。

假设用一模糊控制器控制水箱的水位。水箱由一注水阀和一排水阀来调节水位高低, 两个水阀每一时刻只能开通一个, 注水阀打开水位升高, 开度越大注水速度越快, 同样, 排水阀打开水位降低, 开度越大排水越快。模糊控制器的输出 u 对两个调节阀的控制作用为分程控制, 即输出为 $0V \sim 5V$ (经 D/A 转换后) 时注水阀开, 开度为 $0\% \sim 100\%$ 。输出为 $0V \sim -5V$ 时, 排水阀开, 开度为 $0\% \sim 100\%$, 总的输出量程为 $[-5, 5]$ 。假设水位与设定值之差 e 的量程范围为 $-12cm \sim +12cm$, 即 $[-12, 12]$, e 作为模糊控制器的输入信号。

假设输入 e 和控制作用 u 的论域 X 和 Y 为离散的有限论域, 分别定为 7 个等级和 9 个等级, 即:

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$Y = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

那么输入和输出的量程转换分别是如下映射:

$$\text{输入: } [-12, 12] \rightarrow X$$

$$\text{输出: } Y \rightarrow [-5, 5]$$

对于某一输入信号, 如 $e' = 8cm$, 映射到输入论域 X 上, 则为 X 上的点 2。模糊化的策略有好几种(以后还会讲), 假如我们选择简单的单点模糊化的方法, e' 模糊化的模糊集 \tilde{E}' 则为:

$$E' = 0/-3 + 0/-2 + 0/-1 + 0/0 + 0/1 + 1/2 + 0/3 \\ = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

假如操作人员控制水箱水位的经验中,对水位误差和控制作用两个语言变量,分别记为 E 和 U ,所取的语言值均为:

$\{PB(\text{正大}), PS(\text{正小}), ZO(\text{零}), NS(\text{负小}), NB(\text{负大})\}$

水位误差这一语言变量的各语言值即各模糊子集是定义在论域 X 上的,其隶属函数值假定为表 6.2 所示。

表 6.2 水位误差 E 语言值的隶属函数

求属函数 语言值 \ 等级	-3	-2	-1	0	1	2	3
PB	0	0	0	0	0.3	0.7	1
PS	0	0	0.3	0.7	1	0.7	0.3
ZO	0	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0
NS	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0	0
NB	1	0.7	0.3	0	0	0	0

控制作用这一语言变量的各语言值即各模糊子集是定义在论域 Y 上的,其求属函数值假定为表 6.3 所示。

表 6.3 控制作用 U 语言值的隶属函数

求属函数 语言值 \ 等级	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
PB	0	0	0	0	0	0	0.3	0.7	1
PS	0	0	0	0	0.3	0.7	1	0.7	0.3
ZO	0	0	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0	0
NS	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0	0	0	0
NB	1	0.7	0.3	0	0	0	0	0	0

根据操作人员的经验,水位控制的模糊控制规则库包含以下 5 条规则:

若 E 为 NB 则 U 为 PB 否则

若 E 为 NS 则 U 为 PS 否则

若 E 为 ZO 则 U 为 ZO 否则

若 E 为 PS 则 U 为 NS 否则

若 E 为 PB 则 U 为 NB 。

这 5 条规则构成一个 5 段的模糊条件语句,那么它表示的模糊关系 R 应为:

$$R = \bigcup_{i=1}^5 R_i$$

其中:

$$R_1 = NB(E) \rightarrow PB(U)$$

由表 6.2 和表 6.3 $NB(E)$ 和 $PB(U)$ 的隶属函数定义, 采用 Mamdani 取小运算的蕴涵法则有:

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同样 $\tilde{R}_2 = NS(E) \rightarrow PS(U)$ 得:

$$\tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{R}_3 = ZO(E) \rightarrow ZO(U)$, 即:

$$\tilde{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{R}_4 = PS(E) \rightarrow NS(U)$, 即:

$$\tilde{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{R}_5 = PB(E) \rightarrow NB(U)$, 即:

$$\tilde{R}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 \tilde{R} 由取大运算得到:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 1 & 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由式(6.5),我们就可以求得输入为 E' 时的控制作用 \tilde{U}' 为:

$$\begin{aligned} \tilde{U}' &= \underline{E}' \circ \tilde{R} \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \circ \tilde{R} \end{aligned}$$

按“ $\vee - \wedge$ ”合成规则得:

$$\begin{aligned} \tilde{U}' &= (0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.3, 0.3, 0.3, 0, 0) \\ &= 0.7/-4 + 0.7/-3 + 0.7/-2 + 0.7/-1 + 0.3/0 + 0.3/1 \\ &\quad + 0.3/2 + 0/3 + 0/4 \end{aligned}$$

按最大隶属度原则求控制作用,因为论域中 $-4, -3, -2, -1$ 各点均为最大隶属度 0.7 ,取均值,靠近到输出论域上的点得 -3 ,将 -3 映射到输出论域 $[-5, 5]$ 上,得控制输出为

$$-3 \times \frac{5}{4} = -\frac{15}{4} \text{V}, \text{对应排水阀开度为 } \frac{-\frac{15}{4}}{-5} \times 100\% = 75\%.$$

这一简单的例子说明模糊控制的工作原理。需要指出的是,这只是从工作机理的角度来描述模糊控制器的控制作用产生的推理过程,而在工程应用中模糊控制器的功能实现则有些变化,使得推理更简捷,运行速度更快,更能满足工程应用的需要。下面我们将进一步介绍模糊控制器工程实现的方法。

6.1.5 模糊控制算法的实现

模糊控制算法的实现方法目前主要有三种,即查表法、硬件专用模糊控制器和软件模糊推理等。其最主要区别在于模糊推理的实现方法不同。

1. 查表法

查表法适用于输入、输出论域为离散有限论域的情况。

由 6.1.3 小节模糊控制的工作原理和 6.1.4 小节模糊控制工作原理的示例可以看

出,模糊控制器运行时,主要是由模糊化、模糊推理的合成算法和解模糊几个部分组成。在工程实际应用时,计算机可以不必在每个采样周期都完全按上述步骤计算,在选定了输入输出的论域,确定了输入输出语言变量的各语言值的隶属函数,建立了模糊控制规则后,我们就可以计算出输入输出之间的模糊关系矩阵 \tilde{R} 。对于输入论域上的每一个点,我们可以选定一种模糊化的方法转化成一个模糊子集,再由模糊推理的合成算法得到输出模糊子集。然后选定一种解模糊方法,就可以得出对应于此输入点的输出值,它一般也是输出论域上的一个点。这样重复计算,就可以得到对应于输入论域上全部点的输出值。这样就可以得到一个输入论域到输出论域的对应表,称为**查询表**(Look up table)。表 6.4 是一个查询表的例子,它是由 6.1.4 小节模糊控制器的简单例子计算得到的。

表 6.4 查询表

水位误差	-3	-2	-1	0	1	2	3
控制输出	4	3	2	0	-2	-3	-4

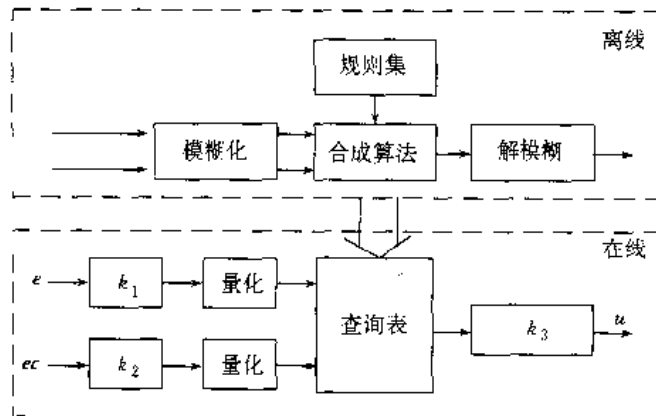


图 6.4 查表法

查询表是输入论域上的点到输出论域的对应关系,它已经是经过了模糊化、模糊推理和解模糊的过程,它可以离线计算得到,模糊控制器在线运行时,进行查表就可以了,因而可以大大加快在线运行的速度。这一过程可以用图 6.4 表示。图 6.4 的上方虚线框中为离线设计部分,离线设计得到一查询表用于在线运行。下方的虚线框即为在线运行部分。图 6.4 是一个两输入单输出模糊控制器的例子,输入量为误差 e 和误差的变化量 ec 。在每一个采样时刻,对采样值 e 和 ec 进行量程转换,即乘以比例因子 k_1 和 k_2 ,然后进行量化,将输入的物理信号值转换为输入论域上的点,就可以通过查询表查到输出控制作用,它也是输出论域上的点,再乘以比例因子 k_3 进行量程转换,就得到输出的硬件接口所要求的物理量。

查表法结构简单,实施方便,资源开销少,在线运行速度快,早期的模糊控制器多采用这一方法实现。但查表法一般只适用于离散有限论域的情况,精度不高,改变控制规则和隶属函数曲线形状较为困难。在要求不太高的场合下,可以采用。

2. 硬件模糊控制器

具有模糊推理功能的 VLSI 模糊芯片首先是 1985 年在 AT&T 贝尔实验室工作的户贝、渡边等开发的,用极大—极小合成算法推理能力达到 8 万 FIPS(Fuzzy Logical Inferences Per Second),每一芯片可装 16 条规则。在这之后模糊芯片得到很快发展。例如世界上最早从事模糊微处理器的公司之一日本的冲电气工业(OKI)研制的 MSM91U044(前提部)和 MSM91U045(结论部)的模糊芯片,在 2 个输入变量、30 条规则的情况下可以达到 7.5MFIPS 的处理速度,规则数可以多达 960 条,输入变量可达 16 个。前提部的隶属函数可以有 56 种,结论部可有 30 种,采用 Max—Min 推理,解模糊采用重心法。

采用了模糊芯片可以构成硬件模糊控制器,它推理速度快,控制精度高,处理速度至少比软件提高一个数量级。

目前已经有用硬件实现的通用模糊控制器产品。如日本立石电机公司的模糊控制器 FZ—1000,3000,5000,6000,日本奥井电机公司的模糊控制器 FOC2001A,日新电机的模糊控制器等等。据估计,在模糊控制技术中应用硬件的比重在 1992 年时占 5%左右,而这个比例在逐年增长。限制硬件模糊控制器应用普及推广的主要因素是价格问题,因为目前模糊芯片的价格还是比较昂贵的。

采用硬件模糊控制器的模糊控制系统的设计和调试一般都有专用的开发支持软件,它支持进行控制规则的制作、隶属函数的制作、控制系统仿真等。

3. 软件模糊推理法

软件模糊推理法指用软件实现输入模糊化、模糊推理算法以及输出解模糊等模糊控制的主要过程,尤其是模糊推理过程。它不同于查表法,可以把模糊推理过程离线完成,而是在线运行时每一个采样周期都要进行模糊推理。

由于采用软件实现模糊推理,因此这一方法灵活性高,适应性强,应用范围广,它可用于输入输出论域为离散有限论域的情形,也可以用于连续无限论域的情形,它比查表法有更高的精度,因为推理要花费一定的时间,因而要求计算机有较高的运行速度。早期查表法应用较为广泛,现在软件推理法用得越来越多。

目前已经有不少用软件实现的通用模糊控制器的产品。如日本富士 1985 年推出了产品 FRUITAX(Fuzzy Rule Information Processing Tool for Advanced Control System)通用模糊推理器,它采用“ $V - \cdot$ ”推理规则,用重心法解模糊,规则数可达 256 个,前提部和结论部变量分别为 5 和 2,隶属函数形式以三角形为基础,I/O 点数为 128 输入/8 输出,控制周期最小为 10s,该软件运行于 Compact A 系列计算机。日本明电舍于 1987 年推出的模糊控制系统,使用该公司的 μ PORT-1 系列作为主系统,用于人机对话、过程 I/O 接口、控制规则、隶属函数和推理情况的表示,子系统推理计算机 i8086 只用于模糊推理。该系统采用“ $V - \wedge$ ”推理规则,重心法解模糊,每个推理机装有 250 条规则,前提部和结论部各含 4 和 2 个变量,隶属函数分 50 档离散化,控制周期最小 0.1s。

另外,许多厂家在它们生产的可编程控制器(PC)和分布式控制系统(DCS)产品中也配置有模糊控制软件模块,一般称模糊控制组件。如富士公司的 PC 系列产品 MICREX-F500, F250 中装有通用模糊控制器 FRUITAX-MF 作为 PC 的一个功能。日本横河的 DCS CENTUM-XL, μ xl 中也装有模糊控制组件。日本山武在其 DCS TDCS-3000LCN 中

也装有模糊控制组件。日本日立在 EX-1000 系列 DCS 中配置了 EX-Fuzzy 模糊控制软件。

6.1.6 模糊控制器的模型

模糊控制器是一种语言控制器,不同于常规的控制器,如 PID 控制器等,如何建立模糊控制器的模型,并利用适当的数学工具对它加以分析和研究,是人们关心的一个问题,下面介绍一下这方面的有关研究情况。

6.1.6.1 模糊控制器的多值继电器模型

W. J. M. Kickert 和 E. H. Mamdani 提出用多值继电器模型来模拟模糊控制器[41][42],模糊控制器转化为非模糊化的控制器,以便采用一般的分析方法如描述函数的方法来分析和研究它。

为简单起见,只讨论单输入单输出的模糊控制器。

设模糊控制规则为:

若 E 是 \tilde{A}_1 则 U 是 \tilde{B}_1 否则

若 E 是 \tilde{A}_2 则 U 是 \tilde{B}_2 否则

.....

若 E 是 \tilde{A}_n 则 U 是 \tilde{B}_n

其中 E 为误差, U 为控制作用。 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n \in F(X)$ 是输入论域 X 上的模糊子集, $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_n \in F(Y)$ 是输出论域 Y 上的模糊子集。

假定 $\tilde{B}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 均为正规模糊集, 即: $\exists y \in Y$, 使 $\tilde{B}_i(y) = 1$, 而且 \tilde{B}_i 是左右对称的, 并假定 \tilde{A}_i 均为凸模糊集。

假定模糊化方法采用单点模糊化方法, 即对 X 中任一点 x , 转化后的模糊集在 x 点处隶属度取 1, 而其余点均取 0。解模糊采用平均最大隶属度方法, 即对 Y 上的模糊集 \tilde{B} , 把 \tilde{B} 的隶属度取最大值的点的平均值作为解模糊的结果。

在上述假设条件下, 模糊控制器的输入输出特性为: 输入论域 X 可以划分为若干子域 X_i , 即:

$$X = \bigcup_i X_i, i = 1, 2, \dots, n$$

在每一个子域 X_i 上, 模糊控制器的输出为同一值, 如图 6.6 所示。这就是模糊控制器的多值继电器模型。

这一特性证明如下:

图 6.5 所示为输入输出论域 X, Y 上的模糊子集 $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{B}_i$ 为左右对称的正规模糊集。 X 论域划分为若干个子域(子集) X_i 。

设输入 $x_1 \in X$, x_1 模糊化为模糊集 \tilde{A}' , \tilde{A}' 为单点模糊集:

$$\tilde{A}'(x) = \begin{cases} 1, & x = x_1 \\ 0, & x \neq x_1 \end{cases}$$

设模糊控制器对应于 \tilde{A}' 的输出为模糊集 $\tilde{B}' \in F(Y)$, 则

$$\tilde{B} = \tilde{A}' \circ \bigcup_i (\tilde{A}_i \rightarrow \tilde{B}_i)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}'(y) &= \bigvee_x \{ \tilde{A}'(x) \wedge [\bigvee_i (\tilde{A}_i(x) \wedge \tilde{B}_i(y))] \} \\
&= \bigvee_x \{ \bigvee_i [\tilde{A}'(x) \wedge \tilde{A}_i(x) \wedge \tilde{B}_i(y)] \} \\
&= \bigvee_i \bigvee_x [\tilde{A}'(x) \wedge \tilde{A}_i(x) \wedge \tilde{B}_i(y)] \\
&= \bigvee_i [\tilde{A}_i(x_1) \wedge \tilde{B}_i(y)]
\end{aligned}$$

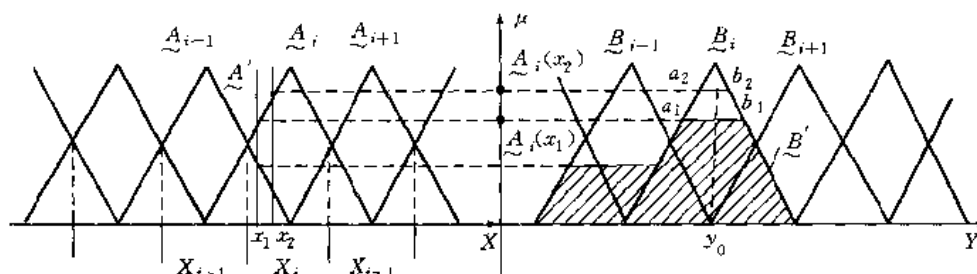


图 6.5 FLC 多值继电器模型推导图示

上式的图形表示如图 6.5 中的阴影部分。 \tilde{B}' 是各个 \tilde{B}_i 在 $\tilde{A}_i(x_1)$ 高度“切头”之后的并。

令： $\tilde{B}_i'(y) = \tilde{A}_i(x_1) \wedge \tilde{B}_i(y), \quad i = 1, 2, \dots, n$

则： $\tilde{B}'(y) = \bigvee_i \tilde{B}_i'(y)$

因为 \tilde{B}_i 均为正规模糊集，故：

$$\bigvee_y \tilde{B}_i'(y) = \tilde{A}_i(x_1)$$

因此：

$$\begin{aligned}
\bigvee_y \tilde{B}'(y) &= \bigvee_y \bigvee_i \tilde{B}_i'(y) \\
&= \bigvee_i \bigvee_y \tilde{B}_i'(y) \\
&= \bigvee_i \tilde{A}_i(x_1)
\end{aligned}$$

上式说明 $\tilde{B}'(y)$ 的最大值为 $\tilde{A}_i(x_1) (i=1, 2, \dots, n)$ 中的最大值，图 6.5 的阴影部分即 \tilde{B}' ， $\tilde{B}'(y)$ 取得这个最大值的点很多，为线段 a_1b_1 。由最大隶属度法的解模糊方法， \tilde{B}' 的解模糊应取 a_1b_1 的中点对应的 Y 轴上的点，即 y_0 点。

若输入为 $x_2 \in X$ ，且 x_2 与 x_1 同属于 X 的某子域 X_i (如图 6.5)，那么用同 x_1 一样的分析方法不难得出，此时模糊控制器输出的隶属度取最大值的点为线段 a_2b_2 ，因为各 \tilde{B}_i 是左右对称的，因此解模糊仍然得 y_0 点。由图 6.5 不难看出，只要输入 $x \in X_i$ ，即在子域 X_i 中，则此时模糊控制器的解模糊值均为 y_0 。

同样当输入 x 落到 X 的其它子域时，输出也取同样数值。这些数值实际上就是各个 \tilde{B}_i 的中心所对应的输出论域 Y 上的点。图 6.6 绘出了 Y 上定义了 7 个模糊子集 $\tilde{B}_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 时的多值继电器特性的图形，它有 7 个输出台阶。

在相邻两个 \tilde{A}_i 的交点处即两个子域 X_i 的交界处的各个点 x ，并不符合上述分析，此时的输出应该是两个相邻输入子域对应的两个输出的平均值，即在继电器特性两个相邻台阶的中间。

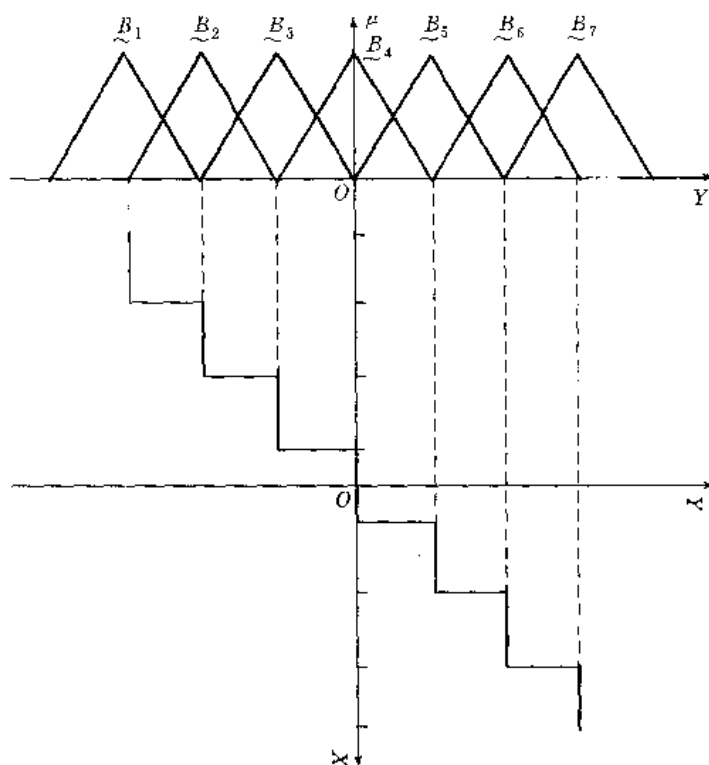


图 6.6 多值继电器特性

若输入模糊子集 \tilde{A}_i 在论域 X 上不是均匀分布的话,则继电器特性也不均匀,图 6.6 中各个输出台阶在 X 轴方向占的宽度则不会均匀。

若输出模糊子集 \tilde{B}_i 在论域 Y 上不是均匀分布的话,则继电器特性也不均匀,图 6.6 中各个输出台阶的高度在 Y 轴方向上不等。

类似地可以把一个多输入模糊控制器等价为一个多维的多值继电器。

6.1.6.2 模糊控制器的代数模糊

PID 控制器是最普遍的一种经典的控制器,它把比例、积分、微分三种功能完美地结合而具备了良好的控制性能和巨大的生命力。以下我们从和常规 PID 控制器相比较的角度来看模糊控制器特性和模型。

PID 控制器数学模型可以由以下微分方程来描述:

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\}$$

式中: $e(t)$: 控制器的输入,一般为被控制量与其设定值的差

$u(t)$: 控制器的控制输出

K_p : 比例系数

T_i : 积分时间常数

T_d : 微分时间常数

当用数字计算机来实现 PID 算法时,选定了采样周期 T ,则上述微分方程离散化为差分方程:

$$u(n) = K_p \left[e(n) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^n e(i) + \frac{T_d}{T} (e(n) - e(n-1)) \right]$$

上式可以简记为:

$$u = K_p \left(e + \frac{T}{T_i} \cdot \Sigma e + \frac{T_d}{T} \cdot ec \right) \quad (6.8)$$

式(6.8)可以用图 6.7 简单地表示。

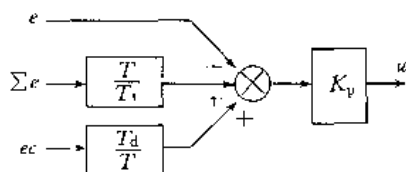


图 6.7 PID 算法

由式(6.8)和图 6.7 可见,PID 控制器是 $e, \Sigma e, ec$ 即比例、积分、微分三种作用的线性组合,它们的系数是不变的。

现在,我们考虑与 PID 控制类似地也有误差、误差的积分、误差的变化三种输入的模糊控制,类似图 6.4 我们可以得一个采用查表法的模糊控制器的一个结构图,如图 6.8 所示。

图 6.8 中, $e, \Sigma e, ec$ 代表误差,误差累积和误差变化, k_1, k_2, k_3, k_4 分别为比例因子。量化是由连续域到离散论域转换的算法,是一非线性处理,当离散论域的点数较多时,量化作用影响不大,我们暂且勿略它。这样图 6.8 就与图 6.7 很相似,主要的不同是图 6.7 中的相加符号“ \otimes ”变成了图 6.8 中的查询表。查询表是模糊化、模糊规则推理、解模糊的处理结果,是由人的控制经验规则推导得出的,也是对 $e, \Sigma e, ec$ 三种输入作用的综合,但它不是像式(6.8)那么简单的相加关系,而是一种更为复杂的非线性的综合,它们的系数随着 $e, \Sigma e, ec$ 的不同而变化。于是,模糊控制器的数学描述可以表示为:

$$u = k_4 f(k_1 e, k_2 \Sigma e, k_3 ec) \quad (6.9)$$

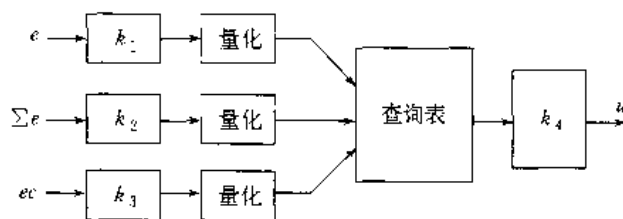


图 6.8 FLC 查表算法

其中 f 是一非线性函数, u 是 $e, \Sigma e, ec$ 的非线性组合,也就是说,图 6.8 的模糊控制器可以看作是一个变增益的 PID 控制器。它与常规 PID 调节器式(6.8)相比较,式(6.8)是对比例、积分、微分作用的线性组合,而式(6.9)则是比例、积分、微分作用的非线性组合。

那么当模糊控制器仅有一个输入 e 时,它相当于一个非线性的比例调节器。当它有两

个输入 e 和 ec 时,则相当于一个非线性的 PD 调节器,这时它引入了微分作用。经典的模糊控制器一般是考虑 e 和 ec 两种输入作用,它相当于一个非线性 PD 调节器,但如果用控制输出的增量作为输出,那么在这种情况下,某一时刻的输出是从前各时刻增量输出的积累,也相当于引入了积分作用,有助于消除系统的稳态误差。

6.2 模糊控制器的设计

6.2.1 模糊控制器设计的内容

模糊控制器设计所包含的主要内容有如下几个部分:

(1) 数据库设计

- ① 论域的离散化
- ② I/O 空间的模糊划分
- ③ I/O 基本模糊子集的隶属函数定义

(2) 模糊化策略

- ① 量程转换和量化
- ② 模糊化方法

(3) 规则库设计

- ① 模糊控制器结构的确定
- ② 模糊控制规则的建立
- ③ 模糊控制规则的完备性、相互作用和相容性

(4) 模糊推理机制

模糊推理方法涉及到模糊蕴涵规则的选择、模糊推理合成算法的选择等。

(5) 解模糊策略

下面,我们就以上有关模糊控制器设计的各个方面分别加以介绍。

6.2.2 数据库设计

6.2.2.1 论域的离散化

如果我們是在离散的有限论域上进行 FLC 的设计,那么各个 I/O 论域应离散化。

为了表示和处理上的方便,离散论域一般定义为如下的规范形式:

$$\{-n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (n-1), n\}$$

也就是取 0 和 0 左右的正、负整数。之所以有正有负,是因为像误差、误差变化率以及控制作用等输入输出量一般都有正负之分,以便对应。

论域上究竟取多少个离散点,也就是 n 取多大,并没有严格的规定,但是一般说来,点数越多,论域上模糊子集的定义越细腻,模糊化、模糊推理和解模糊处理也就越细腻,也就是说模糊控制器的控制作用和控制效果就越细腻,精度越高。当论域中的点数取到极端情形即取到无穷多个点时,就相当于连续论域的情况了。但是论域中的点数太大也会带来负作用,这就是处理运算的量加大,数据库的容量加大,因而使计算机有较大的时间和空间上的开销。而且模糊控制器一般难以满足高精度的控制要求,采用模糊控制器时一般并不

以高的控制精度为目标,因此论域中的离散点数一般也不取得太大,对于一般的工业过程控制中输入输出论域离散点数,大部分资料一般取十几个,例如:

$$\{-6, -5, \dots, 0, \dots, 5, 6\}$$

或:

$$\{-6, -5, \dots, -0, +0, \dots, 5, 6\}$$

后者把0分为-0和+0,这样使得在设定点附近控制作用更细腻,有利于减小稳态误差。

6.2.2.2 I/O空间的模糊划分

I/O空间的模糊划分是指输入输出语言变量的论域上定义了多少个基本模糊子集,换言之,即每个语言变量的辞集定义多少个语言值。因为每一个基本模糊子集的支集都覆盖了论域上的某一区段,因此论域上定义了多少个基本模糊子集也就把论域划分了多少个区段,只不过在模糊划分中,这些区段一般互有重叠部分。

一般来讲一个论域上定义的基本模糊子集数目越多,控制动作越细腻,控制精度相应会提高,但是,过多的模糊划分也不会成正比地提高控制精度,而且模糊控制规则一般也不会总结到过细的程度。从以往的国内、外有关资料来看,对于一般的工业生产过程控制,I/O论域多划分为7个左右等级,如正大(PB)、正中(PM)、正小(PS)、零(ZO)、负小(NS)、负中(NM)、负大(NB)。而在家用电器的模糊控制中则常划分为5个左右的等级,如正大(PB)、正小(PS)、零(ZO)、负小(NS)、负大(NB),最佳的模糊划分可以以此为基础试凑得到。

论域上定义的基本模糊子集可以在论域上均匀地分布,也就是每一基本模糊子集的支集都覆盖了论域上等宽度的一个区段。也可以定义不均匀的模糊划分。不均匀的划分一般是在零(ZO)左右的模糊子集划分得较细,其支集占有较窄的论域区段,因为零(ZO)一般对应控制系统的工作点,这样使得控制器在工作点附近有更细腻的控制动作。

模糊划分还可以是不对称的,也就是零(ZO)两边的正、负相对应的模糊子集,如PS和NS,PM和NM,PB和NB等,不一定有同样的宽度。

不均匀和不对称的模糊划分,使得模糊控制器有更灵活的非线性特性,以适应对象的各种特性。

输入空间的模糊划分决定了控制规则的数目。例如,一个两输入的模糊控制器,若分别定义了7个和5个基本模糊子集,则控制规则应该有 $7 \times 5 = 35$ 条。

图6.9绘出3种模糊划分:粗糙的、较精细的和不均匀的模糊划分。

6.2.2.3 基本模糊子集(辞集)的隶属函数定义

输入输出模糊语言变量的基本模糊子集的定义有两种方式:数值定义和函数定义,它们分别用于离散论域和连续论域的情况。

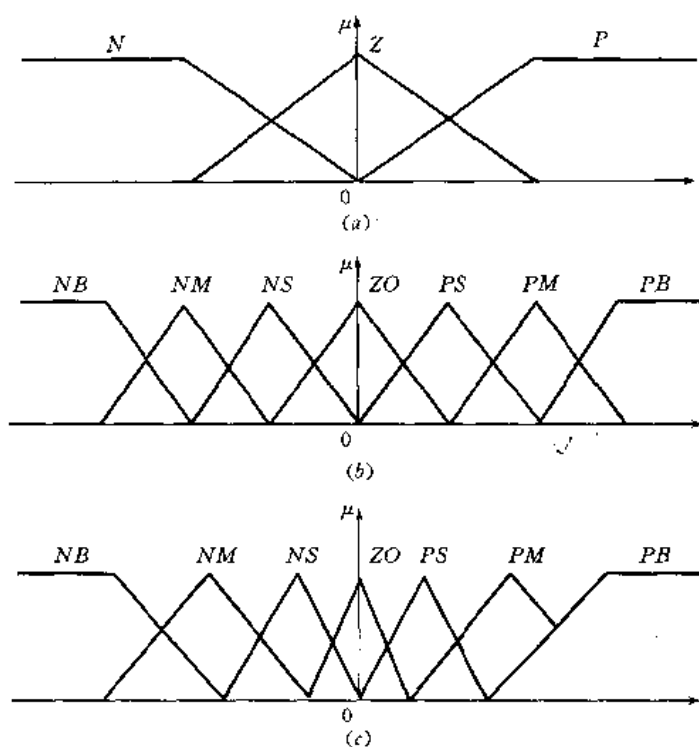
1. 数值定义

当用数值定义时,基本模糊子集的隶属函数表示为模糊向量,其维数取决于相应离散论域所包含的点数。表6.2和表6.3就是数值定义的简单例子,如果在离散论域 $\{-n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n\}$ 上定义一个基本模糊子集 A ,则 A 有如下形式:

$$A = \sum_{i=-n}^n a_i / i, i \text{ 为整数}$$

或:

$$A = (a_{-n}, a_{-(n-1)}, \dots, a_n)$$



(a)粗糙的 (b)较精细的 (c)不均匀的

图 6.9 模糊划分

2. 函数定义

当用函数定义时,基本模糊子集的隶属函数表示为其连续论域上的一个函数形式,典型的常用的函数形式有三角形、倒钟形(正态分布)和梯形等。数值定义时某一点的隶属函数值也可由这些函数计算得出。

一个倒钟形的隶属函数定义的例子如下:

$$\mu_A(x) = \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

当论域的定义变化时,函数形式的隶属函数能很快地适应,比数值定义的形式要方便。上例中,当论域改变时,只要改变 x_0 和 σ 就可以了。

隶属函数曲线的形状到底是选为三角形、倒钟形还是梯形,或是其它形状,没有严格的客观标准,设计者可以根据控制对象的不同情况加之主观上的习惯、处理上的方便等来决定。但有一点应注意,同一论域上的相邻基本模糊子集,其交集的最大隶属度应达到一定水平,这点我们在下文的有关完备性的论述中还要详细说明。这也就是说,模糊子集的隶属函数的形状应该有一定的宽度,而不能太瘦。

6.2.3 模糊化策略

在模糊控制应用中,检测到的数据一般是清晰的,而在模糊控制器中处理的是模糊量,因而模糊化是必要的步骤。它是由观测的输入空间到相应的输入论域上的模糊子集的

转换,这种转换常有主观性。模糊化应解决以下问题:量程转换和量化以及选择模糊化方法。

6.2.3.1 量程转换和量化

量程转换即把输入信号的物理范围转化为相应的论域,体现这一转换是比例因子 k , 见图 6.4 中的 k_1 和 k_2 。

若输入信号的物理范围为 $[-x, x]$, 对应的论域为离散论域 $\{-n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n\}$ 或连续论域 $[-n, n]$, 则比例因子 k 为:

$$k = n/x$$

对于某一输入信号 x' , $x' \in [-x, x]$, 量程转换后为:

$$n' = kx'$$

当论域为连续情况时, n' 点即 x' 映射到相应论域上的点。但当论域为离散情况时, n' 不一定正好是整数, 即 n' 不一定属于 $\{-n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n\}$, 于是需要将 n' 量化, 即整量化为相应论域上的某一点。量化一般按靠近原则, 即 kx' 不为整数时, 取靠近它的整数值, 可用下式表示:

$$n' = \text{INT}(kx' + 0.5)$$

式中 INT 表示取整运算。

最后, 我们把量程转换和量化归结为下述的映射:

离散论域情况:

$$\begin{aligned} [-x, x] &\rightarrow \{-n, \dots, 0, \dots, n\} \\ x' &\mapsto n' = \text{INT}(kx' + 0.5) \\ (k &= n/x) \end{aligned} \quad (6.10)$$

连续论域情况:

$$\begin{aligned} [x, x] &\rightarrow [-n, n] \\ x' &\mapsto n' = kx' \\ (k &= n/x) \end{aligned} \quad (6.11)$$

例如, 误差 E 的论域为 $\{-6, 5, \dots, 0, \dots, 5, 6\}$, 实际误差的物理范围为 $[-1.2, 1.2]$, 则比例因子 $k = 6/1.2 = 5$, 若某一时刻误差输入为 0.64, 则取其量化值为 $\text{INT}(kx' + 0.5) = \text{INT}[5 \times 0.64 + 0.5] = \text{INT}(3.7) = 3$, 3 为论域上的一个点。

6.2.3.2 模糊化方法

常用的模糊化方法有以下两种:

(1) 把论域中某一精确点模糊化为一个模糊单点(Fuzzy Singleton), 或称单点模糊集。模糊单点是这样一种模糊子集, 该点对它的隶属度为 1, 而论域中其余所有点对它的隶属度均为 0, 这是一种特殊的模糊集。

这种方法由于它的自然性和处理上的简单因而在 FLC 的应用中常常被采用。

(2) 把论域中的某一精确点模糊化为在论域上占据一定宽度的模糊子集。当输入信号受到噪声干扰时, 应考虑这种模糊化方法, 等腰三角形的模糊子集是人们常常采用的一种, 此时三角形的顶点应对应于输入信号的均值, 而三角形的底边宽度可取为 2 倍的输入信号的均方差。当然三角形并不是唯一的模糊化后模糊子集的隶属函数所采用的形状, 它

也可以是倒钟形、梯形等其它形状。如果同一论域上原来定义的基本模糊集的隶属函数采用了某种形状,那么论域上的精确点模糊化后的模糊子集也可以考虑采用同样形状,这样处理时就可以一致,因而也就简便些。

6.2.4 规则库设计

6.2.4.1 模糊控制器的结构

确定模糊控制器的结构是建立模糊控制规则的必要前提,不同的结构具有不同形式的规则。选择 FC 的结构形式,也应该和人工控制经验规则的形式相适应。

我们这里所说的模糊控制器的结构是从它的输入输出的角度来划分的,前面我们已经列举过一个输入一个输出的 FLC、两个输入一个输出的 FLC(式 6.1)和多个输入多个输出的 FLC(式 6.2),它们所对应的模糊控制规则分别是一维的、两维的和多维的模糊推理语句,我们可以把它们称为单输入单输出 SISO FLC、两输入单输出 FLC 和多输入多输出 MIMO FLC。常规的模糊控制器是以被控制量的误差 e 、误差的变化率 ec 或是再加上误差的积分 ei 等为输入,控制作用 u 为输出,可以算是一个 MISO 的 FLC,但是这里 ec 和 ei 都是由 e 直接计算得到的, e , ec 和 ei 实质上只对应一个外部的输入变量。在控制理论中,这样的控制系统属于单变量控制系统, SISO 系统。在控制理论中所谓多变量系统,即 MIMO 系统或 MISO 系统,应该有多个输入变量,它们是有独立性的外部作用,而不应该是由其它输入直接计算得到的。

因此上述对模糊控制器似乎有点矛盾的称呼是因为从不同角度出发的。为此我们给出下述的模糊控制器结构的分类。

1. 单变量模糊控制器

常规的模糊控制器为单变量模糊控制器,它有一个独立的外部输入变量和一个输出变量。而单变量模糊控制器输入的个数称为模糊控制器的维数。

(1) 一维模糊控制器 如图 6.10(a)所示,一维 FLC 的输入一般为被控变量与设定值之差 e 。因为仅采用误差 e 作为输入,因此一维 FLC 控制效果不理想,难以得到好的动态品质,只用于对象简单(如一阶)要求不高的情况。

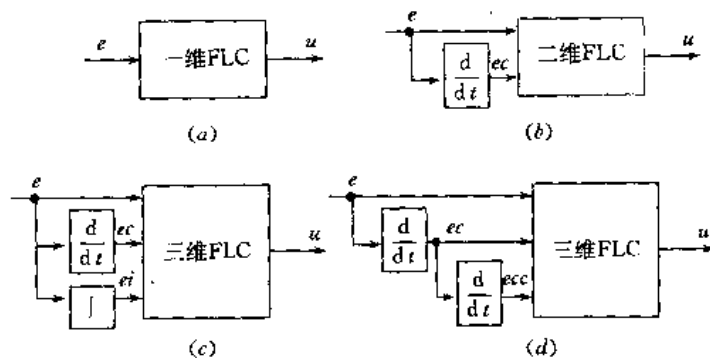
(2) 二维模糊控制器 如图 6.10(b)所示,二维 FLC 的输入一般为误差 e 和误差的变化率 ec ,这是最典型最基本模糊控制器,应用也最广泛,因此 FLC 一般都采用这种结构。

(3) 三维模糊控制器 如图 6.10(c)和(d)所示,三维 FLC 的输入可以是 e , ec 和 e 的积分 ei ,也可以是 e , ec 和 ec 的变化率 ecc 。三维 FLC 应该能得更好的控制特性,但其设计却更为复杂,尤其是模糊控制规则的总结就更为困难。因为人对具体被控对象进行模糊控制的逻辑思维通常不超过三维,三维输入规则的建立是较为复杂和困难的,实用中包含 ei 或 ecc 的人工操作经验也比较少。

2. 多变量模糊控制器

多变量模糊控制器有多个有独立性的输入变量和一个或多个输出变量,其结构如图 6.11 所示。

多变量模糊控制器的变量个数多,如果每个输入变量又可引出各自的误差、误差变化



(a) 一维 FLC (b) 二维 FLC (c) 和 (d) 三维 FLC

图 6.10 单变量模糊控制器

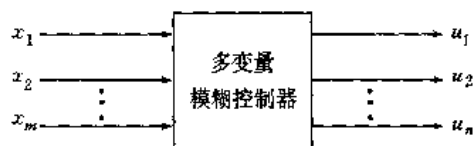


图 6.11 多变量模糊控制器

率甚至误差的积分等等输入量,那么模糊控制器的输入个数很多,对应于模糊控制规则的推理语句维数很高,直接建立这种系统的控制规则几乎是不可能的,正如我们前面讲到的,人的经验控制的逻辑思维通常不超过三维。因此,多变量模糊控制器的设计一般要进行结构分解,进行降维处理,分解为多个简单模糊控制器的组合形式,有关这方面的设计方法我们在后续的多变量模糊控制器的设计中介绍,本小节介绍的模糊控制器的设计,主要是针对单变量模糊控制器的情况。

单变量 FLC 的结构设计主要是选择 FLC 的输入输出量,因为 FLC 是基于人的操作经验和有关专家的知识,因此应认真总结这些经验和知识,从中提炼出相关的输入、输出作用。另外,从控制理论的角度,误差 e 、误差变化率 ec 、误差的积分 ei 这些输入量各有各的控制作用特点, e 是最基本的控制量,相当于常规 PID 调节器的比例作用,是不可少的。 ec 相当于微分作用,对抑制系统超调增加稳定性有重要作用。 ei 相当于积分作用,有助于消除稳态误差。这些控制理论知识对选择模糊控制器的输入、输出也起到辅助作用。

有一种单变量的模糊控制器采用图 6.10(b) 的二维结构, e 和 ec 作为输入,但输出在大误差用控制作用 u ,而在小误差时用控制作用 u 的变化量 Δu ,它也是常常采用的一种结构形式,小误差时有积分作用。

6.2.4.2 建立模糊控制规则

模糊控制规则的建立是非常重要的,规则是否正确地反映操作人员和有关专家的经验,是否能适应被控对象的特性,直接关系到整个控制器的性能和控制效果。

规则库的建立可以通过以下途径。

1. 总结操作人员、领域专家、控制工程师的经验和知识

操作人员在长期的操作实践中积累了宝贵的控制经验,摸到被控对象的一些“脾气”,在他们的实际操作行为中,有意识地或无意识地用一些具有模糊性的操作规则来操作。

领域专家在被控过程的专业领域方面有着专业理论知识和该领域的工作经验,对被控过程的机理(如物理的、化学的、生化的等等)有着深刻的认识,对过程的行为及对外部作用的反应能给出理论分析和解释。

有关的控制工程师具备控制理论知识而且对具体的被控过程有相当的了解和经验,他们可能把控制理论在这个具体被控对象上的应用进行过多次的尝试和总结,他们的经验也是很宝贵的。

归纳整理这些有关人员的经验和知识而形成规则库可以采取如下的措施:

(1) 通过各种途径收集这些人员的经验和知识,他们的经验和知识有时用经过思考的语言形式来表达。一个典型的例子是水泥窑的操作手册。

(2) 可以采用问答的方式,认真地组织一系列的问题,请有关人员进行回答,挖掘他们的经验。

(3) 观察操作人员的控制动作,通过观察进行总结。

通过以上办法可以归纳建立规则库的原型,然后再经过试凑和调试逐步完善。

2. 基于过程的模糊模型

被控过程的动态特性可以用模糊语言来描述,称为过程的模糊模型。基于过程的模糊模型可以产生一组模糊控制规则来达到系统希望的动态性能,这一组控制规则就形成模糊控制的规则库。这种方法可以给出更好的性能和稳定性,但是它非常复杂,而且目前还没有成熟。

3. 基于学习

Procyk 和 Mamdani 首先提出了具有学习能力的自组织模糊控制器的概念[37]。自组织模糊控制器 SOFC (Self-Organization Fuzzy Controller) 是一种分级结构,包含两个规则库。第一级是一般的 FLC 的规则库,第二级由元规则(meta-rules)组成,它有学习能力,可以根据希望的系统性能创建和修改第一级规则库。一个非常吸引人的例子是 Sugeno 的有学习能力的模糊汽车[44][45],它经训练后可以自行在停车库停车。

以上是建立规则库的一些方法,应该说第 1 种即通过总结归纳有关人员的经验和知识来得出规则库是最基本的方法。在实际应用中,对于并非很特殊的控制对象,可以先根据前人的经验和应用成果,把前人曾成功地应用过的规则库作为基础和参考。如表 6.1 就是一个例子,在此基础上根据具体控制对象的特点再进行必要的修正。

初步建立的模糊控制规则不一定是完美无缺的,也往往需要进一步调整。没有一套很完善规范的调整办法,往往需要试凑,经过实验检验效果。下面我们将给出有关模糊控制规则的完备性、互作用性和相容性的分析,对建立调整规则库有一定的指导意义。

6.2.4.3 模糊控制规则的完备性(Completeness)

所谓完备性,指的是对于任何一种被控过程的状态,模糊控制器总是能产生一个控制作用,即对于任何一个非空的过程的模糊状态,不能由规则库导出一个空的模糊控制作用。

定义 6.1 设控制规则库如下:

若输入为 \tilde{X}_i 则控制作用为 $\tilde{U}_i, i=1, 2, \dots, n$, 其中输入 $\tilde{X}_i \in F(X)$ 为各输入论域上的模糊子集的笛卡尔积, 比如输入为误差 \tilde{E}_i 和误差变化 \tilde{EC}_i , 则 $\tilde{X} = \tilde{E}_i \times \tilde{EC}_i$, 论域 $X = E \times EC, \tilde{E}_i \in F(E), \tilde{EC}_i \in F(EC)$ 。

若对所有 $x \in X$, 总有一个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 满足 $\tilde{X}_i(x) > \epsilon$, 即:

$$\forall x \in X \quad \exists_{1 \leq i \leq n} \quad \tilde{X}_i(x) > \epsilon \quad (6.12)$$

式中 $\epsilon \in (0, 1]$, 则称规则库是完备的。

要满足上述完备性的定义, 显然对于所有的 $x \in X$, 所有 \tilde{X}_i 并集的隶属度应大于 ϵ , 即:

$$\forall x \in X \quad \bigcup_{i=1}^n \tilde{X}_i(x) > \epsilon \quad (6.13)$$

满足完备性的要求意味着对任何一种输入状态, 总可以在规则库中找到一条规则, 使得这个输入状态和该规则前件的匹配程度大于 ϵ , 该规则可以在 ϵ 程度上激活。

$\epsilon \in (0, 1]$, 实际设计中可以掌握 $\epsilon = 0.5$ 左右。 ϵ 过小, 规则的完备性变坏, ϵ 太高则使得控制作用不灵敏。

要满足规则的完备性, 在输入论域的模糊划分中就应注意这个问题。正如我们在 6.2.2.2 小节 I/O 空间的模糊划分中讲过的, 输入论域上定义的基本模糊子集是相交的, 有重迭的, 从规则的完备性考虑, 两两相邻的基本模糊子集的交点的隶属度应该大于 ϵ 。

在建立规则库时, 如果发现有预先定义的基本模糊子集组合的模糊条件不包含于规则库中, 或者发现有输入状态和基本模糊条件(即规则的前件)的最大匹配程度小于 ϵ , 则应该考虑在规则库中增加规则或调整规则。

6.2.4.4 模糊控制规则的互作用性(Interactivity)

假定模糊控制规则如式(6.12)所示, 那么如果输入是 \tilde{X}_i , 我们希望控制输出为 $\tilde{U}_i, i=1, 2, \dots, n$ 。但实际上控制作用一般不会正好是 \tilde{U}_i , 不会正好是原来规则中预先定义的基本模糊子集, 而会有所改变。这是规则相互作用的结果。

规则的互作用性可以描述为:

定义 6.2 对于式(6.12)的规则库, \tilde{R} 表示其模糊关系, 若下式成立:

$$\exists_{1 \leq i \leq n} \quad \tilde{X}_i \circ \tilde{R} \neq \tilde{U}_i$$

即:

$$\exists_{1 \leq i \leq n} \quad \exists_{u \in U} \quad (\tilde{X}_i \circ \tilde{R})(u) \neq \tilde{U}_i(u)$$

则称式(6.12)所采的规则有相互作用。

这种情形下, 构造的模糊关系 \tilde{R} 和采用的合成规则修改了预先设定的模糊控制作用 \tilde{U}_i 。

下面我们给出互作用性的一些性质。

性质 6.1 如果控制器的模糊关系 \tilde{R} 是 \tilde{X}_i 和 \tilde{U}_i 笛卡尔积的并集, 并假设所有 \tilde{X}_i 均为正规模糊集。那么, 对于所有输入 \tilde{X}_i , 由“ $\vee - \wedge$ ”合成规则求得的控制作用 $(\tilde{X}_i \circ \tilde{R})$ 满足下式:

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \quad \tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}_i \circ \tilde{R}$$

证明:

$$\begin{aligned}
(X_i \circ R)(u) &= \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge R(x, u)\} \\
&= \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge [\bigvee_{j=1}^n (X_j(x) \wedge U_j(u))]\} \\
&\geq \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge [X_i(x) \wedge U_i(u)]\} \\
&= \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge U_i(u)\}
\end{aligned}$$

因为 X_i 是正规模糊集, 即 $\bigvee_{x \in X} X_i(x) = 1$, 于是:

$$(X_i \circ R)(u) \geq U_i(u)$$

即:

$$\bigvee_{1 \leq i \leq n} U_i \subseteq X_i \circ R$$

证毕。

可见原来的模糊集 U_i 包含于由 X_i 得出的模糊控制作用 $(X_i \circ R)$ 。

性质 6.2 则指出了模糊规则之间不存在相互作用的条件。

性质 6.2 若输入 X_i, X_j 两两不相交, 即:

$$\begin{aligned}
X_i \cap X_j &= \emptyset, \\
i, j &= 1, 2, \dots, n \text{ 且 } i \neq j
\end{aligned}$$

也就是说:

$$X_i(x) \wedge X_j(x) = 0$$

并且 X_i, X_j 均为正规的, 则下式成立:

$$\bigvee_{1 \leq i \leq n} X_i \circ R = U_i$$

证明:

$$\begin{aligned}
(X_i \circ R)(u) &= \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge R(x, u)\} \\
&= \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge [\bigvee_{j=1}^n (X_j(x) \wedge U_j(u))]\} \\
&= \bigvee_{x \in X} \{[\bigvee_{j=1}^n (X_i(x) \wedge X_j(x) \wedge U_j(u))]\}
\end{aligned}$$

因为对于 $i \neq j$ 时 $X_i(x) \wedge X_j(x) = 0$, 因此:

$$\begin{aligned}
(X_i \circ R)(u) &= \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge X_i(x) \wedge U_i(u)\} \\
&= \bigvee_{x \in X} \{X_i(x) \wedge U_i(u)\}
\end{aligned}$$

又 $X_i(x)$ 是正规的, 因此:

$$(X_i \circ R)(u) = U_i(u)$$

证毕。

可见, 当 $X_i \cap X_j = \emptyset$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$, 且 $i \neq j$) 时规则间没有相互作用。反过来, 若只要规则相交, 即:

$$\exists_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} X_i \cap X_j \neq \emptyset$$

则:

$$X_i \circ R \neq U_i$$

即规则间存在相互作用, 证明如下:

设 $X_i \cap X_j = \emptyset$ $i, j = 1, 2, \dots, n$ 且 $j \neq i$, 但除外 $j = k$, 也就是说 X_i 与 X_k 相交 ($k \neq i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$), 即:

$$\bigvee_{x \in X} [X_i(x) \wedge X_k(x)] = \alpha, 0 < \alpha \leq 1$$

因此:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{X}_i \circ \tilde{R})(u) &= \bigvee_{x \in X} \{\tilde{X}_i(x) \wedge \tilde{R}(x, u)\} \\
 &= \bigvee_{x \in X} \{\tilde{X}_i(x) \wedge [\bigvee_{j=1}^n (\tilde{X}_j(x) \wedge \tilde{U}_j(u))]\} \\
 &= \bigvee_{x \in X} \{\bigvee_{j=1}^n [\tilde{X}_i(x) \wedge \tilde{X}_j(x) \wedge \tilde{U}_j(u)]\} \\
 &= \bigvee_{x \in X} \{\tilde{X}_i(x) \wedge \tilde{X}_i(x) \wedge \tilde{U}_i(u)\} \vee \\
 &\quad \bigvee_{x \in X} [\tilde{X}_i(x) \wedge \tilde{X}_k(x) \wedge \tilde{U}_k(u)] \\
 &= \tilde{U}_i(u) \vee [\alpha \wedge \tilde{U}_k(u)] \geq \tilde{U}_i(u)
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

即: $\tilde{X}_i \circ \tilde{R} \supseteq \tilde{U}_i, \quad \tilde{X}_i \circ \tilde{R} \neq \tilde{U}_i$

因此规则存在相互作用。

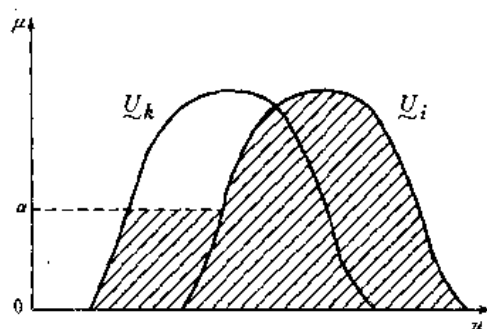


图 6.12 $\tilde{U}_i(u) \vee [\alpha \wedge \tilde{U}_k(u)]$

相互作用的大小取决于式(6.14)即 $\tilde{U}_i(u) \vee [\alpha \wedge \tilde{U}_k(u)]$ 和 $\tilde{U}_i(u)$ 的相异程度,我们用图 6.12 表示 $\tilde{U}_i(u) \vee [\alpha \wedge \tilde{U}_k(u)]$,如图中阴影部分所示。可见,相互作用程度的大小与两种因素有关: α 和 \tilde{U}_i, \tilde{U}_k 之间的重叠程度。一方面当 α 越大,也就是输入 \tilde{X}_i 和输入 \tilde{X}_k 重叠程度越大,也就是说规则的完备性增大,会使相互作用程度增大,因而规则的完备性和无相互作用性是相互矛盾的。另一方面,当 \tilde{U}_i 和 \tilde{U}_k 相互重叠越大,由图 6.12, $\tilde{U}_i(u) \vee [\alpha \wedge \tilde{U}_k(u)]$ 越接近 $\tilde{U}_i(u)$,相互作用程度越小,当两者完全重合,则无相互作用,当两者越远离,重叠越小,则相互作用越大。因此,从减小互作用性的角度,模糊控制器控制输出的基本模糊子集的隶属函数形状,不能定义得太瘦,而应更模糊一些,彼此有一定的重叠。

下面我们给出一个反应模糊集合之间重叠性的定义。

定义 6.3 模糊集合 $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$, \tilde{A} 与 \tilde{B} 相关的可能性(Possibility) $\Pi(\tilde{A}|\tilde{B})$ 定义为:

$$\Pi(\tilde{A}|\tilde{B}) = \bigvee_{x \in X} [\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)] \tag{6.15}$$

\tilde{A} 与 \tilde{B} 相关的必要性(Necessity) $N(\tilde{A}|\tilde{B})$ 定义为:

$$N(\tilde{A}|\tilde{B}) = \bigwedge_{x \in X} [\tilde{A}(x) \vee (1 - \tilde{B}(x))] \tag{6.16}$$

$\Pi(\tilde{A}|\tilde{B})$ 反映了 \tilde{A} 和 \tilde{B} 重叠或搭接的程度,而 $N(\tilde{A}|\tilde{B})$ 则反映了 \tilde{B} 包含于 \tilde{A} 的程度。

有了上述定义,我们可以用它来表示规则的完备性和互作用性。

假如模糊控制规则为式(6.12)所示,设 \tilde{X}_i, \tilde{X}_j 是相互邻接的, $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots,$

n), 显然当 $\Pi(\tilde{X}_i|\tilde{X}_j)$ 的水平越大, 即 \tilde{X}_i 和 \tilde{X}_j 交接重迭程度越大, 式(6.13) $\forall x \in X \bigcup_{i=1}^n \tilde{X}_i$ (x) 取值也越大, 规则的完备程度也越大。但式(6.14)中的 α 也增大, 会使规则的互作用程度增大。在 $\Pi(\tilde{X}_i|\tilde{X}_j)$ 相同的情况下, 若 $\Pi(\tilde{U}_i|\tilde{U}_j)$ 越大, 也就是 \tilde{U}_i 和 \tilde{U}_j 重迭程度越大, 则规则间的互作用程度越小。

以上分析模糊控制规则的互作用性是在采用 Mamdani 的取小运算和蕴涵规则和“ $\vee - \wedge$ ”合成运算的前提下进行的。实际上, 采用不同的蕴涵运算和合成运算规则对规则的互作用性有不同的影响, 规则的互作用性也是一个很复杂的问题, 目前尚没有很全面的研究[15]。

6.2.4.5 模糊控制规则的相容性(Consistency)

如果由模糊控制规则推导出的控制输出是多峰的, 说明模糊控制规则存在不相容性, 这可能发生在规则库中有两个控制规则具有几乎相同的状态(前件部分)但却有不同的控制作用(后件部分), 当模糊控制规则库是由人的经验和知识归纳总结得来时, 人的头脑中可能会有矛盾的准则, 这样会导出不相容的控制规则。

这种规则的不相容性导致的模糊控制作用的多峰现象, 在解模糊算法之后一般都会消失。因为解模糊算法总是要得出一个精确的控制量。然而这并没有解决规则间本质上存在的矛盾性, 具有矛盾的规则虽然可以最后得一个唯一的控制作用, 但这个控制作用是不合理的, 它可以导致不合理的控制效果。因此消除或替换有矛盾的不相容的规则是必要的。

如何来表示规则的不相容性呢? 用什么指标来刻划呢? 一般认为, 对相差不大的输入 \tilde{X}_i 和 \tilde{X}_j , 若 \tilde{X}_i 和 \tilde{X}_j 产生基本相同的控制作用 \tilde{U}_i 和 \tilde{U}_j , 就认为模糊规则 i 和 j 相容, 否则就是不相容的, 基于这个思想, 引入下述定义。

定义 6.4 规则库如式(6.12)所示, 第 i 条规则和第 j 条规则 ($i, j=1, 2, \dots, n$) 的不相容性指标 C_{ij} 定义为:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= |\Pi(\tilde{X}_i|\tilde{X}_j) - \Pi(\tilde{U}_i|\tilde{U}_j)| \\ &= |\bigvee_{x \in X} [\tilde{X}_i(x) \wedge \tilde{X}_j(x)] - \bigvee_{u \in U} [\tilde{U}_i(u) \wedge \tilde{U}_j(u)]| \end{aligned} \quad (6.17)$$

定义

$$C_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \quad (6.18)$$

为第 i 条规则与其余所有规则的不相容度。

由(6.17)式, 当 $\tilde{X}_i = \tilde{X}_j$, $\Pi(\tilde{X}_i|\tilde{X}_j) = 1$, 而 $\Pi(\tilde{U}_i|\tilde{U}_j) = 0$, 即 \tilde{U}_i 和 \tilde{U}_j 完全不重迭时, $C_{ij} = 1$, 即最大值, 不相容程度最大; 若 \tilde{U}_i 与 \tilde{U}_j 也完全重迭, $\Pi(\tilde{U}_i|\tilde{U}_j) = 1$, $C_{ij} = 0$, 则两条规则完全相容。 C_{ij} 取值范围为 $[0, 1]$, 也可以把它看作是对不相容性的隶属度。

在进行规则的不相容性检查和处理时, 先根据各条规则的前件部分 \tilde{X}_i 和后件部分 \tilde{U}_i 的隶属函数的定义, 由式(6.17)计算出所有的 C_{ij} 。计算 C_{ij} 时注意, 因为 $C_{ij} = C_{ji}$, 可以减少一半计算量。然后再由式(6.18)计算出所有的 $C_i, i=1, 2, \dots, n$ 。然后对 C_i 大的规则进行处理。可以把 C_{ij} 以矩阵的形式列写出来, 以便观察不相容性分布的具体情况。可以把 C_i 全部列写出来, 取某一阈值, 超过阈值者进行处理。例如一个规则库有 15 条控制规则

$\tilde{R}_1 \sim \tilde{R}_{15}$, 其相应的不相容性指标 $C_1 \sim C_{15}$ 如表 6.5 所示。

表 6.5

\tilde{R}_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C_i	2.4	3.4	4.2	3.8	4.2	1.8	4.5	3.5	4.0	3.9	1.7	3.3	4.1	3.7	3.3

可见, 规则 \tilde{R}_7 有最大的不相容度, 如果选阈值为 4.0, 那么被取消或修改的规则为 $\{\tilde{R}_3, \tilde{R}_5, \tilde{R}_7, \tilde{R}_9, \tilde{R}_{13}\}$ 。

关于规则相容性的进一步论述, 可参考文献[16]。

有关模糊控制规则的完备性、互作用性和相容性是一个较为复杂的问题, 前文我们讨论的有关这个问题的一些概念和思想, 在我们建立模糊控制器的规则库时是有指导意义的。

6.2.5 模糊推理机制

模糊控制器的模糊推理机制的设计, 主要是选择一种模糊推理算法, 当模糊控制器采用查表法实现时, 用来离线设计查询表, 当模糊控制器采用软件推理法实现时, 用来在线进行模糊推理。模糊控制器的模糊推理方法实际上就是我们在第五章所叙述的各种模糊逻辑推理算法, 是这些算法在模糊控制器中的具体应用。各种基本的模糊推理算法读者可参看第五章。

模糊推理算法和很多因素有关, 如模糊蕴涵规则、推理合成规则、模糊条件语句前件部分的连接词“而且”(and)和语句之间的连接词“否则”(also)的不同定义等等, 因为这些因素有多种不同定义, 可以组合出相当多的推理算法, 因此这个问题也是非常庞杂的, 本小节仅就模糊控制中常用的推量算法作一介绍。

在 6.1.3.3 推理机小节中, 我们曾给出了式(6.5)和(6.6)表示的模糊推理算法公式, 这个算法中显式地包含了模糊关系 \tilde{R} , 它对于表达模糊控制的算法原理, 表达控制规则的数学描述和模糊推理的逻辑关系是很合适的, 但在实际应用时则有一定的局限性。在离散论域的情况下, 模糊关系 \tilde{R} 可以用模糊矩阵表示, 可以离线事先计算出来, 在线运行时可以减少计算量, 有一定的好处。但当 \tilde{R} 维数很高时, 存储不一定很方便, 而且事先计算的 \tilde{R} 难以在线修正, 用起来不灵活。在连续论域的情况下, 一般不会按式(6.5)和(6.6)的算式去推理, 这时根据算法的具体情况推导出较为简捷的算式, 算式中一般不再显示地计算 \tilde{R} 。

下面我们介绍模糊控制中常使用的几种模糊推理算法。

6.2.5.1 Mamdani 模糊推理算法

Mamdani 模糊推理算法采用取小运算规则定义模糊蕴涵表达的模糊关系, 记为 R_C 。

在 5.4.3 小节即多重多维模糊推理逻辑推理小节中, 我们已经推导多重多维模糊推理的一个算法公式(5.60), 即: 对于 (\tilde{A}_{i1}) 且 (\tilde{A}_{i2}) 且 \cdots 且 $(\tilde{A}_{in}) \rightarrow (\tilde{B}_i)$, $i=1, 2, \cdots, m$, 当模糊关系取 R_C , 合成运算为“ $\wedge - \vee$ ”时有:

$$\tilde{B}' = (\tilde{A}'_1 \times \tilde{A}'_2 \times \cdots \times \tilde{A}'_n) \circ \bigcup_{i=1}^m R_C(\tilde{A}_{i1}, \tilde{A}_{i2}, \cdots, \tilde{A}_{in}; \tilde{B}_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^m [\bigcap_{j=1}^n (\tilde{A}'_j \circ \tilde{R}_{ij}(\tilde{A}_{ij}; \tilde{B}_i))] \quad (\text{原 } 5.60)$$

对于式(6.1)和式(6.5),属于多重二维推理,因此有:

$$\begin{aligned} \tilde{C}' &= (\tilde{A}' \times \tilde{B}') \circ \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n \tilde{R}_{ij}(\tilde{A}_i, \tilde{B}_j; \tilde{C}_{ij}) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n \{[\tilde{A}' \circ \tilde{R}_i(\tilde{A}_i; \tilde{C}_{ij})] \cap [\tilde{B}' \circ \tilde{R}_j(\tilde{B}_j; \tilde{C}_{ij})]\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

那么:

$$\begin{aligned} \tilde{C}'(z) &= \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n \{ \bigvee_{x \in X} [\tilde{A}'(x) \wedge (\tilde{A}_i(x) \wedge \tilde{C}_{ij}(z))] \wedge \\ &\quad [\bigvee_{y \in Y} [\tilde{B}'(y) \wedge (\tilde{B}_j(y) \wedge \tilde{C}_{ij}(z))]] \} \\ &= \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n \{ [\bigvee_{x \in X} [\tilde{A}'(x) \wedge \tilde{A}_i(x)]] \wedge \tilde{C}_{ij}(z) \wedge \\ &\quad [\bigvee_{y \in Y} [\tilde{B}'(y) \wedge \tilde{B}_j(y)]] \wedge \tilde{C}_{ij}(z) \} \\ &= \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n \{ [\bigvee_{x \in X} [\tilde{A}'(x) \wedge \tilde{A}_i(x)]] \wedge [\bigvee_{y \in Y} [\tilde{B}'(y) \wedge \tilde{B}_j(y)]] \wedge \tilde{C}_{ij}(z) \} \end{aligned}$$

将式(6.15)代入上式得:

$$\tilde{C}'(z) = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n \{ \Pi(\tilde{A}' | \tilde{A}_i) \wedge \Pi(\tilde{B}' | \tilde{B}_j) \wedge \tilde{C}_{ij}(z) \} \quad (6.20)$$

令:

$$\alpha_{ij} = \Pi(\tilde{A}' | \tilde{A}_i) \wedge \Pi(\tilde{B}' | \tilde{B}_j) \quad (6.21)$$

称 α_{ij} 为**匹配度**,它反映了输入 (\tilde{A}') 且 (\tilde{B}') 和规则 (\tilde{A}_i) 且 $(\tilde{B}_j) \rightarrow (\tilde{C}_{ij})$ 的匹配程度,于是(6.20)式变为:

$$\tilde{C}'(z) = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n [\alpha_{ij} \wedge \tilde{C}_{ij}(z)] \quad (6.22)$$

特别地,当我们用单点模糊集(singleton)对输入信号的精确量进行模糊化,即输入值在这单点上隶属度量为1,其余点均置为0,例如输入量分别为 x_0 和 y_0 ,则模糊化后 $\tilde{A}'(x_0)=1, \tilde{B}'(y_0)=1$,而 $\forall x \in X$ 且 $x \neq x_0$ 有 $\tilde{A}'(x)=0$,对 $\forall y \in Y$ 且 $y \neq y_0$ 有 $\tilde{B}'(y)=0$.那么这种情况下不难得出:

$$\alpha_{ij} = \tilde{A}_i(x_0) \wedge \tilde{B}_j(y_0) \quad (6.23)$$

式(6.22)即是采用 Mamdani 的取小运算定义蕴涵表达的模糊关系时,由式(6.5)的推理合成规则导出的模糊推理算法。它避开求模糊关系 \tilde{R} ,而得到一个简捷的算法公式。这一算法可以用图 6.13 表示。由图 6.13,这一模糊推理算法可以有这样一个解释:模糊控制作用 \tilde{C}' 由规则库的各个规则中的原始控制作用 $\tilde{C}_{11}, \tilde{C}_{12}, \dots, \tilde{C}_{mn}$ 导出,而原始控制 \tilde{C}_{ij} 在匹配度 α_{ij} 水平上激活, α_{ij} 是实际输入的过程状态 (\tilde{A}', \tilde{B}') 与第 ij 条规则匹配的程度,换句话说第 ij 条规则对控制作用 \tilde{C}' 的贡献程度为 α_{ij} 。最后,总的控制作用 \tilde{C}' 为各个分作用的并。

式(6.22)所示的模糊推理算法可以用图形直观地表示。为了作图方便,我们假定控制规则共有两个模糊条件语句组成:

若 x 是 \tilde{A}_1 且 y 是 \tilde{B}_1 则 z 是 \tilde{C}_1 否则

若 x 是 \tilde{A}_2 且 y 是 \tilde{B}_2 则 z 是 \tilde{C}_2 (6.24)

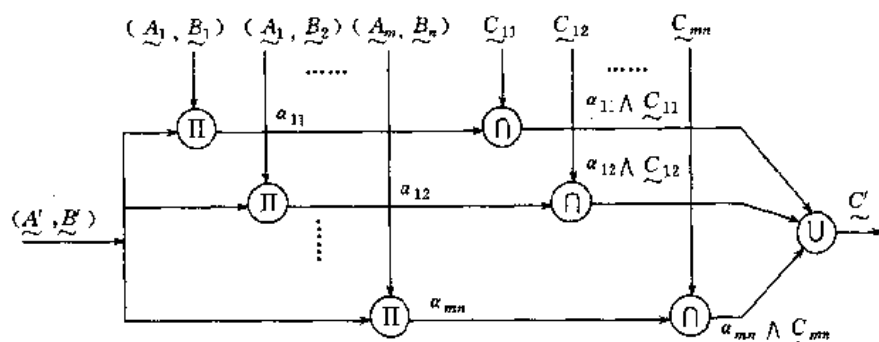


图 6.13 模糊控制输出的计算

现在输入为 x 是 \tilde{A}' 且 y 是 \tilde{B}' , 推导输出 \tilde{C}' , 应用式 (6.22) 不难得出, 此时 \tilde{C}' 为:

$$\begin{aligned}\tilde{C}'(z) &= [\alpha_1 \wedge \tilde{C}_1(z)] \vee [\alpha_2 \wedge \tilde{C}_2(z)] \\ &= \tilde{C}'_1(z) \vee \tilde{C}'_2(z)\end{aligned}$$

其中:

$$\alpha_1 = \Pi(\tilde{A}' | \tilde{A}_1) \wedge \Pi(\tilde{B}' | \tilde{B}_1)$$

$$\alpha_2 = \Pi(\tilde{A}' | \tilde{A}_2) \wedge \Pi(\tilde{B}' | \tilde{B}_2)$$

上式的图形表示如图 6.14 所示。

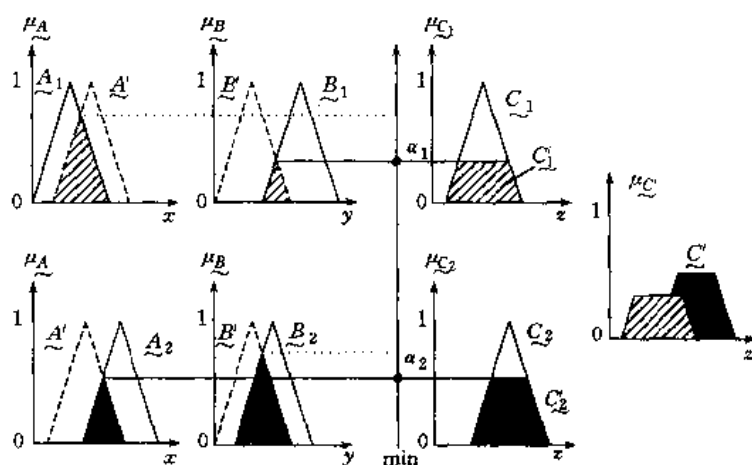


图 6.14 Mamdani 模糊推理算法

特别地, 当输入信号模糊化为单点模糊集时, 有:

$$\alpha_1 = \tilde{A}_1(x_0) \wedge (\tilde{B}_1(y_0))$$

$$\alpha_2 = \tilde{A}_2(x_0) \wedge (\tilde{B}_2(y_0))$$

那么推理过程的图形表示如图 6.15。

式 (6.22) 即模糊蕴涵采用 Mamdani 的取小运算时推理机的模糊推理算法, 它是针对式 (6.1) 这种最基本最典型的两个输入单个输出的模糊控制器 (二维 FLC)。

如果对于式(6.2)这种多输入多输出的更一般化的情况,设输入为 $\tilde{A}_1' \times \tilde{A}_2' \times \cdots \times \tilde{A}_n'$, p 个互相独立的输出为 $\tilde{C}_1', \tilde{C}_2', \dots$ 和 \tilde{C}_p' , 与两输入单输出的情况类似, 不难推导出:

$$\tilde{C}_k'(z) = \bigvee_{i=1}^m [\alpha_i \wedge \tilde{C}_{ik}(z)], \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (6.25)$$

式中 α_i 为输入与第 i 个规则的匹配度, 且有:

$$\alpha_i = \bigwedge_{j=1}^n [\Pi(\tilde{A}_j' | \tilde{A}_{ij})] \quad (6.26)$$

当输入模糊化为单点模糊集时, 则:

$$\alpha_i = \bigwedge_{j=1}^n [\tilde{A}_{ij}(x_j^0)] \quad (6.27)$$

其中 x_j^0 是第 j 个输入量映射到相应的输入论域 X_j 上的点。式(6.25)就是对于式(6.2)这种多输入多输出的模糊控制器的推理算法。

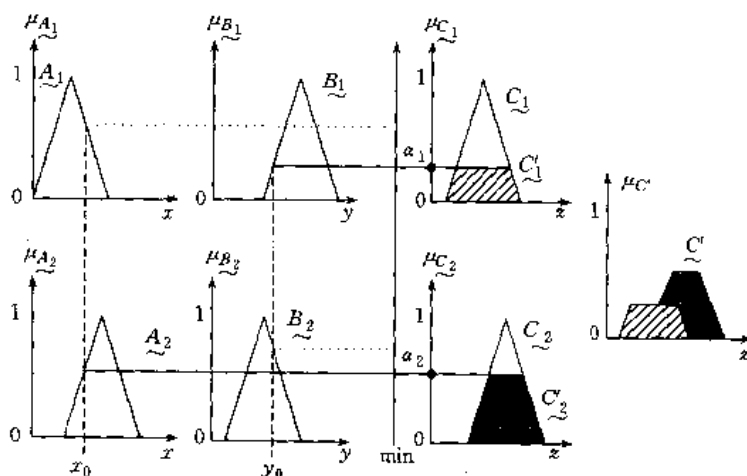


图 6.15 Mamdani 模糊推理算法(输入为 singleton)

6.2.5.2 Larsen 模糊推理算法

正如第五章中所介绍的, Larsen 把模糊蕴涵定义为乘积运算, 记为 \tilde{R}_p 。

对于 \tilde{R}_p , 与 \tilde{R}_c 类似, 同样有下述隶属函数运算式成立:

$$(a_1 \wedge a_2) \rightarrow b = (a_1 \rightarrow b) \wedge (a_2 \rightarrow b)$$

上式两边均等于 $(a_1 \wedge a_2) \cdot b$ 。因此与 \tilde{R}_c 情况相同, 当模糊推理采用“ $\vee - \wedge$ ”合成运算, $(\tilde{A}_1 \text{ 且 } \tilde{A}_2 \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } \tilde{A}_n)$ 定义为取小运算, Larsen 的模糊推理同样满足式(5.60), 证明过程可参照第五章 5.4 小节。那么对于式(6.1)的两个输入单个输出的模糊控制器的推理机, 同样满足式(6.19)的推理规则, 于是:

$$\begin{aligned} \tilde{C}'(z) &= \bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^n \tilde{C}'_{ij}(z) \\ &= \bigvee_{i=1}^m \left\{ \bigvee_{x \in X} [\tilde{A}'_i(x) \wedge (\tilde{A}_i(x) \tilde{C}_{ij}(z))] \wedge \right. \\ &\quad \left. [\bigvee_{y \in Y} [\tilde{B}'_i(y) \wedge (\tilde{B}_i(y) \tilde{C}_{ij}(z))]] \right\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

由上式可见, 当 $\tilde{C}_{ij}(z) = 1$ 时, $\tilde{C}'_{ij}(z)$ 取得最大值, 即:

$$\begin{aligned}\max_{\tilde{z}} \tilde{C}'_{ij}(z) &= \bigvee_{x \in X} [\tilde{A}'(x) \wedge \tilde{A}_i(x)] \wedge [\bigvee_{y \in Y} (\tilde{B}'(y) \wedge \tilde{B}_j(y))] \\ &= \Pi(\tilde{A}' | \tilde{A}_i) \wedge \Pi(\tilde{B}' | \tilde{B}_j) = \alpha_{ij}\end{aligned}$$

当 $\tilde{C}_{ij}(z)=0$ 时, $\tilde{C}'_{ij}(z)$ 取最小值 0;

当 $0 < \tilde{C}_{ij}(z) < 1$ 时, 有:

$$0 < \tilde{C}'_{ij}(z) < \alpha_{ij}.$$

因此 \tilde{C}'_{ij} 是包含于 \tilde{C}_{ij} 内, 最大值为 α_{ij} 的一个分控制作用 (见图 6.16), 虽然这种情况下不像蕴涵定义取 \tilde{R}_c 时那样能推导出式 (6.22) 和图 6.13 那样的显式地包含 α_{ij} 的模糊推理算法, 但 α_{ij} 仍然反映了第 ij 条规则对控制作用 \tilde{C}' 的贡献程度。

特别地, 当输入模糊化为单点模糊集时, 式 (6.28) 变为:

$$\begin{aligned}\tilde{C}'(z) &= \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n [(\tilde{A}_i(x_0) \tilde{C}_{ij}(z)) \wedge (\tilde{B}_j(y_0) \tilde{C}_{ij}(z))] \\ &= \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n [\alpha_{ij} \tilde{C}_{ij}(z)]\end{aligned}\quad (6.29)$$

式中 α_{ij} 与 Mamdani 推理算法中单点模糊集的情形相同, 即:

$$\alpha_{ij} = \tilde{A}_i(x_0) \wedge \tilde{B}_j(y_0)$$

式 (6.29) 为输入 \tilde{A}' , \tilde{B}' 模糊化为单点模糊集时的 Larsen 推理算法, 它也简化了推理的计算。

与 Mamdani 模糊推理算法类似, 我们仍用式 (6.24) 两条模糊条件语句组成的模糊控制规则, 给出一个 Larsen 模糊推理算法的图形解释。由式 (6.28), 此时有:

$$\begin{aligned}\tilde{C}'(z) &= \bigvee_{i=1}^2 \{ \bigvee_{x \in X} [\tilde{A}'(x) \wedge (\tilde{A}_i(x) \tilde{C}_i(z))] \wedge \\ &\quad [\bigvee_{y \in Y} [\tilde{B}'(y) \wedge (\tilde{B}_i(y) \tilde{C}_i(z))]] \}\end{aligned}$$

由前述对式 (6.28) 的解释, 不难画出推理算法的图形, 如图 6.16 所示。

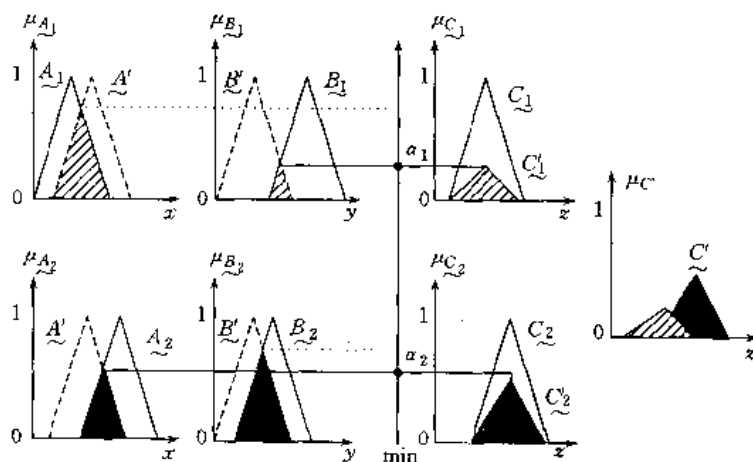


图 6.16 Larsen 模糊推理算法

对于 \tilde{A}' , \tilde{B}' 模糊化为单点模糊集的情况, 对于式 (6.24) 两条模糊条件语句的模糊控

制规则,式(6.29)变为:

$$\tilde{C}'(z) = [\alpha_1 \tilde{C}_1(z)] \vee [\alpha_2 \tilde{C}_2(z)]$$

因此其图形表示如图 6.17。

在模糊集的隶属函数曲线定义为三角形的情况下,图 6.17 的单点模糊集输入的情形中, \tilde{C}'_1 和 \tilde{C}'_2 两个分控制作用亦为三角形,这由式(6.29)很容易看出。而图 6.16 所示的情况, \tilde{A}' 、 \tilde{B}' 也是三角形但并非单点模糊集,由式(6.28), \tilde{C}'_1 和 \tilde{C}'_2 的形状并非纯粹的三角形,因此是一近似的表示,但其三个顶点的位置是确定的。

对于式(6.2)这种多输入多输出 MIMO 的模糊控制器,(6.28)式变为:

$$\tilde{C}'_k(z) = \bigvee_{i=1}^m \{ \bigwedge_{j=1}^n [\bigvee_{x \in X} (A'_{ij}(x) \wedge A_{ij}(x) \tilde{C}_u(z))] \}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (6.30)$$

当输入模糊化为单点模糊集时,则:

$$\tilde{C}'_k(z) = \bigvee_{i=1}^m [\alpha_i \tilde{C}_u(z)], \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (6.31)$$

其中:

$$\alpha_i = \bigwedge_{j=1}^n [A_{ij}(x_j^0)]$$

x_j^0 是第 j 个输入量转换到其相应论域 X_j 上的点, α_i 为输入与第 i 个规则的匹配度。

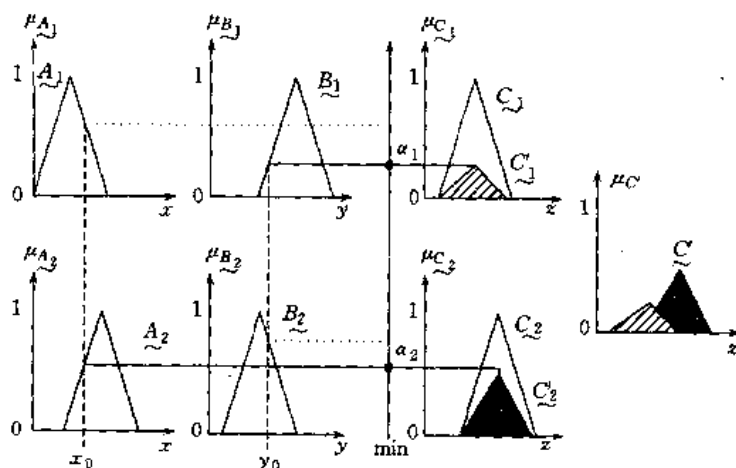


图 6.17 Larsen 模糊推理算法(输入为 singleton)

6.2.5.3 Tsukamoto 模糊推理算法

Tsukamoto 提出的模糊推理算法是一简化的推理方法,适用于模糊集的隶属函数曲线为单调的情况,即单调递增或单调递减,一般模糊子集数量也少,比如两个,表示正和负。

图 6.18 表示式(6.24)的两个模糊条件语句组成的模糊控制规则的推理算法、输入信号模糊化为单点模糊集,它与两条规则的匹配度为:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tilde{A}_1(x_0) \wedge \tilde{B}_1(y_0) \\ \alpha_2 &= \tilde{A}_2(x_0) \wedge \tilde{B}_2(y_0) \end{aligned}$$

如图 6.18, 由 α_1 直接得出第 1 条规则的分控制作用 z_1, z_1 满足:

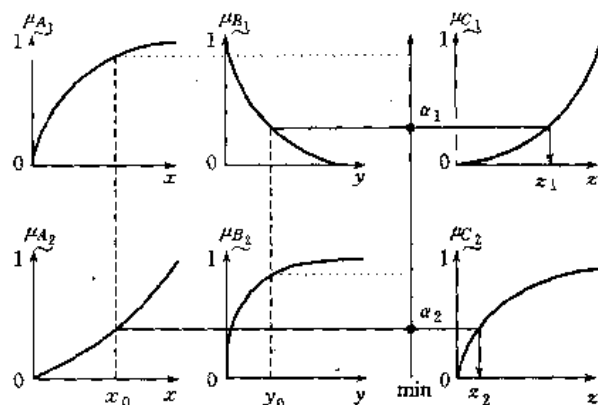


图 6.18 Tsukamoto 模糊推理算法

$$\tilde{C}_1(z_1) = \alpha_1$$

同样可得出第 2 条规则的分控制作用 z_2, z_2 满足:

$$\tilde{C}_2(z_2) = \alpha_2$$

z_1, z_2 已是精确的非模糊的数值, 那么总的控制作用 z_0 由 z_1 和 z_2 的加权平均得出:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

z_0 已是精确的控制作用。

如果规则由多个模糊条件语句组成, 例如 m 个, 那么显然有:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i} \quad (6.32)$$

6.2.5.4 简易模糊推理算法

简易模糊推理算法更为简易可行, 有人认为它是今后模糊控制算法的主流[47]。

简易模糊推理算法是指在模糊控制规则的形式中, 后件部分不再是模糊集合而是精确数量的推理形式, 例如一个由两个模糊条件语句组成的两输入单输出的模糊控制规则为:

若 x 是 \tilde{A}_1 且 y 是 \tilde{B}_1 则 $z = z_1$ 否则

若 x 是 \tilde{A}_2 且 y 是 \tilde{B}_2 则 $z = z_2$

输入为单点模糊集 x_0 且 y_0 , 它与这两条规则的匹配度 α_1 和 α_2 为:

$$\alpha_1 = \tilde{A}_1(x_0) \wedge \tilde{B}_1(y_0)$$

$$\alpha_2 = \tilde{A}_2(x_0) \wedge \tilde{B}_2(y_0)$$

那么总的控制作用 z_0 由 z_1 和 z_2 的加权平均得出:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

对于由多条模糊条件语句组成的控制规则,例如 m 条,控制作用为:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i} \quad (6.33)$$

6.2.5.5 函数型模糊推理算法

如果把简易模糊推理算法中的后件由原来的常数换为函数形式,则称为函数型模糊推理算法。函数是定义在输入空间上的。例如一个由两条模糊条件语句组成的控制规则为:

若 x 是 A_1 且 y 是 B_1 则 $z=f_1(x,y)$ 否则

若 x 是 A_2 且 y 是 B_2 则 $z=f_2(x,y)$

输入为单点模糊集 x_0 且 y_0 , 则它与两条规则的匹配度分别为:

$$a_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)$$

那么由第 1 条和第 2 条规则导出的分控制作用分别为 $\alpha_1 f_1(x_0, y_0)$ 和 $\alpha_2 f_2(x_0, y_0)$, 总的控制作用为它们的加权平均, 即:

$$x_0 = \frac{\alpha_1 f_1(x_0, y_0) + \alpha_2 f_2(x_0, y_0)}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

当模糊控制规则由多个模糊条件语句组成时,则有:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_0, y_0)}{\sum_{i=1}^m \alpha_i} \quad (6.34)$$

这种方法由 Takagi 和 Sugeno 提出并应用于控制一个汽车模型。

6.2.5.6 模糊控制器其它模糊推理算法

应该说模糊控制器可以采用的模糊控制算法可以有很多种。影响模糊推理算法变化的因素也是多方面的,这里简单作些介绍。

1. 模糊蕴涵规则的定义

不同的模糊蕴涵规则导致不同的模糊推理算法,以上我们主要介绍 \tilde{R}_L, \tilde{R}_P 型的模糊蕴涵规则在模糊控制器推理机中的应用。实际上,我们在第五章 5.3.5 小节中介绍的各种蕴涵规则如 $\tilde{R}_C, \tilde{R}_P, \tilde{R}_M, \tilde{R}_L, \tilde{R}_I, \tilde{R}_H, \tilde{R}_G, \tilde{R}_{GG}, \tilde{R}_{GS}, \tilde{R}_{JL}, \tilde{R}_D, \tilde{R}_\Delta, \tilde{R}_\blacktriangle, \tilde{R}_\cdot, \tilde{R}_\pi, \tilde{R}_\square$ 等均可使用。Mizumoto 等曾经对这些蕴涵规则进行过比较(参看第五章 5.3.6 小节),并从他们研究比较的角度得到一些有参考意义的结论。

2. 模糊推理合成规则的定义

模糊推理合成规则除了“ \vee — \wedge ”运算外,模糊控制中还可以采用其它的算子对。模糊控制中采用的合成规则主要是:

V—A, 取大—取小

V — , 取大—算术积

$V \rightarrow \odot$, 取大—有界积

$V-\cap$, 取大—强化积

在模糊控制中常常采用的是 $V-\wedge$ 和 $V-\cdot$ 合成运算, 它们计算简便。

3. 输入和规则匹配度的定义

模糊控制器的输入和控制规则的匹配度在模糊推理中起着重要作用, 在我们上文介绍中, 一般使用取小运算定义匹配度, 对输入为二维单点模糊集的情况, 匹配度定义为:

$$\alpha_i = \tilde{A}_i(x_0) \wedge \tilde{B}_i(y_0)$$

实际上匹配度的定义也不是唯一的, 有时也采用算术积来定义;

$$\alpha_i = \tilde{A}_i(x_0) \tilde{B}_i(y_0) \quad (6.35)$$

应该说乘积运算定义的匹配度包含了每个输入的贡献, 而取小运算定义的匹配度则强调了主导因素的作用。

除了以上这三种因素也还有其它因素影响模糊控制器推理机的推理算法。这些因素本来各自已经有多种定义, 而且各种定义之间又可有不同的组合, 因而可以演变出很多种推理算法, 因此人们也很难全面地进行研究比较, 而且研究比较的角度、标准也不同, 因而也很难把这些推理算法很明确很一致地排出优劣次序。一些学者的研究结果可以作为参考, 模糊控制器的设计者还是主要根据自己的实际应用背景, 进行研究、实验和比较, 选择合适的算法。目前实际应用的资料中, 一般还是 \tilde{R}_c 和 \tilde{R}_p 蕴涵规则、 $V-\wedge$ 合成规则采用得比较多, 而且实践证明都有较好的应用效果。

6.2.6 解模糊策略

解模糊是模糊化的逆过程, 它把模糊推理得到的控制作用的模糊集转化为执行机构所能接受的精确量, 解模糊亦称判决。

解模糊设计主要是选择一个解模糊方法以实现解模糊算法。另外还要设计一个比例因子(参看本章图 6.4 中的比例因子 k_s), 以实现解模糊后所得到的控制输出论域上的点转换到实际输出信号的物理范围上, 也就是实现控制输出论域到实际物理范围的量程转换。

常用的解模糊方法有以下几种。

1. 最大隶属度法

最简单的方法称为最大隶属度法, 它取控制输出论域上的点 u_0 作为解模糊结果, 在 u_0 点控制输出的隶属函数达到最大值:

$$\tilde{U}(u_0) = \max_{u \in U} \tilde{U}(u)$$

但是当隶属函数有多个最大值点时, u_0 则不能唯一地确定。为此有下述平均最大隶属度法。

2. 平均最大隶属度法

顾名思义, 平均最大隶属度法取所有达到控制作用隶属函数的最大值的点的平均值作为解模糊结果。设有 r 个点 u_1, u_2, \dots, u_r 其隶属函数值都达到最大值, 那么解模糊结果 u_0 为:

$$u_0 = \sum_{i=1}^r \frac{u_i}{r} \quad (6.36)$$

可能出现所有的隶属度最大的点构成一条直线,那么可以取这条直线的中点作为解模糊的结果。

3. 重心法

重心法亦称加权平均法,它以控制作用论域上的点 $u \in U$ 对控制作用模糊集的隶属度 $\tilde{U}(u)$ 为权系数进行加权平均而求得解模糊结果。对于离散论域的情形,设 $U = \{u_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 有:

$$u_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{U}(u_i) u_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{U}(u_i)} \quad (6.37)$$

对于连续论域的情形:

$$u_0 = \frac{\int_U \tilde{U}(u) u \, du}{\int_U \tilde{U}(u) \, du} \quad (6.38)$$

4. 取中位数法

取中位数法把控制作用模糊集的隶属函数与横坐标轴所围成的面积分为左右两等份,取平分点为解模糊的结果。

对于连续论域的情况,设控制作用 \tilde{U} 的支集 $\text{supp } \tilde{U} = [u_1, u_2]$, 那么解模糊结果 $u_0 \in [u_1, u_2]$ 满足:

$$\int_{u_1}^{u_0} \tilde{U}(u) \, du = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \tilde{U}(u) \, du \quad (6.39)$$

对于离散论域的情况,设控制作用 \tilde{U} 论域上有 r 个点 $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ 为 \tilde{U} 的支集 $\text{supp } \tilde{U}$, 论域为规范形的定义,即 $U = \{-n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n\}$, 那么解模糊结果 $u_k (1 \leq k \leq r)$ 满足:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{U}(u_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \tilde{U}(u_i) \quad (6.40)$$

当然上式大部分情况不能精确地成立,此时可以按靠近原则,取靠近隶属函数面积平分点的点。

以上是四种解模糊算法,还有其它方法,此处不再一一列举。对于离散论域的情况,解模糊结果不一定正好是控制作用论域 U 上的点。对于规范形的论域 $U = \{-n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n\}$ 解模糊结果不一定正好是 $-n$ 和 n 之间的整数。此时可以有两种处理办法。一种是按靠近原则取最接近的论域上的点作为解模糊结果。另一种也可以直接取计算出的数值,它虽然不是 $-n$ 和 n 之间的整数,但它属于 $[-n, n]$ 范围,量程转换后同样在实际控制信号的物理范围上,而且这种取法控制作用更细腻。

选择解模糊算法,还没有一个系统的规范的方法和原则。在实际应用中,重心法是采用得比较多的一种方法,平均最大隶属度法也有时被采用。一些人的研究实验结果指出重心法给出较好的效果,有效好的稳态性能,它的输出是连续的而不是跳跃式的。而平均最大隶属度方法的输出类似继电器特性,它的瞬态性能较好[43][46]。

6.3 模糊控制方法的进展

模糊控制技术的诞生以 1974 年英国伦敦大学玛丽皇后学院教授 E. Mamdani 博士的用于小型蒸汽机控制的模糊控制器的诞生为标志,至今已经二十年有余。二十多年来模糊控制方法方面的研究取得不少成果与进展。早期经典的模糊控制器是图 6.10(b)所示的单变量二维 FLC 的结构形式。这种经典的 FLC,和常规的控制器的 PID 调节器相比具有无须建立被控对象的数学模型、对被控对象的非线性和时变性具有一定的适应能力即鲁棒性较好等特点,但它也有一些需要进一步改进和提高的地方。第一个方面的改进是提高模糊控制器的稳态控制精度,因为控制动作欠细腻,稳态精度欠佳是模糊控制的一个弱点。模糊控制和 PI 控制相结合是一种常用的方法。第二个方面的改进是进一步提高模糊控制器的适应能力,提高模糊控制器的智能水平以更好地适应对象的变化,提高控制系统的动态品质。自适应控制技术、人工智能技术、神经网络技术和模糊控制技术的结合,大大地推动了模糊控制方法的进展,出现了参数自整定模糊控制、自适应模糊控制、专家模糊控制以及神经模糊控制等等各种智能水平更高的模糊控制方法。第三个方面的改进是研究多变量模糊控制器,以适用于多变量控制系统。

本小节简要介绍一下模糊控制方法的进展情况。

6.3.1 Fuzzy-PID 复合控制

Fuzzy-PID 复合控制指的是模糊技术与常规的 PID 控制算法相结合的控制方法。这种控制方法常见的一种是模糊控制与 PI 调节器相结合应用的 Fuzzy-PI 双模控制形式。

这种改进的控制方法的出发点主要是因为模糊控制器本身消除系统稳态误差的性能比较差,难以达到较高的控制精度。尤其是在离散有限论域设计时,更为明显。这可以从它处理输入输出的方法来分析。考虑图 6.4 所示典型的模糊控制器。对于误差输入信号,要把它转化为误差论域上的点,处理方法如上小节式(6.10)所示,即

$$n' = \text{INT}(k_1 e' + 0.5)$$

式中 e' 为某时刻的输入误差, k_1 是误差的量程转换比例因子, n' 为转化到误差论域上的点。由上式可见,当 $n' = 0$ 时,仍有:

$$|k_1 e'| < 0.5$$

即: $|e'| < 0.5/k_1$ (6.41)

式中 k_1 是误差信号的物理范围 $[-e, e]$ 到误差论域 $\{-n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n\}$ 量程转换的比例因子,由式(6.10), $k_1 = n/e$ 。于是上式变为:

$$|e'| < \frac{0.5}{n} e$$

一般规范化的离散论域形式中常常取 $n=6$ 或 7 ,因此大约有:

$$|e'| < 7\%e$$

也就是说 $|e'|$ 在误差量程最大值 e 的大约 7% 以内时,模糊控制器已经把它当作 0 来对待了,因此 $|e'| < 7\%e$ 的稳态误差模糊控制器无法消除,这是控制点附近的一个控制上的盲

区和死区。

对于控制作用,模糊控制器可以采用它的增量 Δu_i 作为输出,积分后输出给被控对象,这样相当于引入了积分作用,有利于消除稳态误差。然而 Δu_i 是解模糊后的离散点,不连续,因而控制作用不细腻,不利于精调消除稳态误差。例如到某一稳态时刻 n ,误差为 0。维持对象工作在这一点的控制作用应该是某一稳态值,设为 u' ,那么希望模糊控制器的控制输出此时等于 u' ,即希望:

$$\sum_{i=0}^n k_3 \Delta u_i = u'$$

式中 k_3 为控制作用量程转换的比例因子,由于 Δu_i 不连续,上式一般不能精确地成立,这就造成控制对象的状态还会变化,误差不能自此时起就维持为 0。

PI 调节器的积分调节作用从理论上可使系统的稳态误差控制为 0,有着很好的消除稳态误差的作用。因此有人提出模糊控制和 PI 控制相结合的一种方案。当误差在某一个阈值以外时,采用模糊控制,以获得更好的瞬态性能;当误差落到阈值以内的范围时,则采用 PI 控制,以获得更好的稳态性能。这种模糊控制与 PI 控制两种控制模式相结合的控制方法我们称之为 **Fuzzy-PI 双模控制**,其结构图如图 6.19 所示。

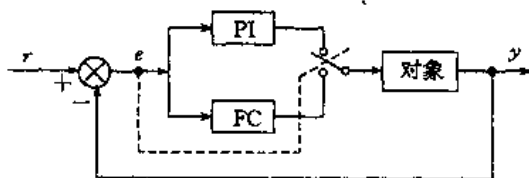


图 6.19 Fuzzy-PI 双模控制

模糊控制和 PID 调节器相结合以增加稳态控制性能的另一个方案如图 6.20 所示。控制系统总的控制作用是模糊控制器的控制作用和 I 调节器控制作用的和。不难理解,这相当于一个具有变参数的比例微分控制作用和不变参数的积分控制作用的 PID 调节器。文献[32]对这种形式的控制方案模拟实验研究表明,它比单个的模糊控制器和单个的 PID 调节器均有更好的控制性能。

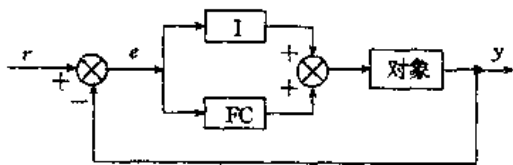


图 6.20 Fuzzy-I 复合控制

6.3.2 参数自整定模糊控制

考虑图 6.4 所示的典型单变量二维模糊控制器,根据 6.1、6.2 小节模糊控制器代数模型的分析,我们把单变量三维 FLC 的模型式(6.9)应用于图 6.4 的二维的情形,显然有:

$$u = k_3 f(k_1 e, k_2 ec) \quad (6.42)$$

f 是非线性函数。显然 FLC 的控制作用 u 与比例因子 k_1, k_2, k_3 有着密切的关系, 也就是说它们的变化会导致 FLC 控制作用的变化, 也就引起控制系统的动态性能和稳态性能的变化。因此人们想到: 能否根据控制系统的性能来在线整定比例因子 k_1, k_2, k_3 , 使它们保持合适的数值, 从而使系统的性能达到令人满意的水平? 答案是肯定的。这就是**参数自整定模糊控制**, 或称**比例因子自整定模糊控制**。这种控制方法较之常规的固定比例因子的模糊控制方法, 对环境变化有较强的适应能力, 在随机环境中能对控制器进行自动校正, 使得被控对象特性变化或扰动情况下, 控制系统保持较好的性能。

参数自整定模糊控制系统的框图如图 6.21 所示。由图可见, 它比常规的 FLC 增加了两个功能模块, 一个是系统性能测量模块, 它由系统的误差 e , 误差变化率 ec 等计算出表征系统性能指标的数据。采用哪些指标来表征系统性能, 要根据比例因子调整规则的需要来确定。比例因子调整功能模块是参数自整定 FLC 比常规 FLC 增加的第二个功能块。它依据系统的性能指标, 用一套调整算法在线调整比例因子。

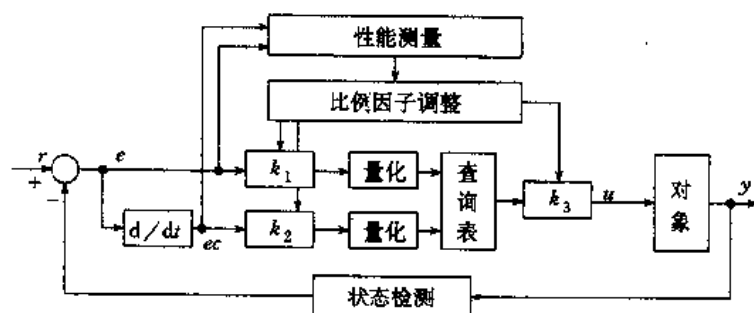


图 6.21 参数自整定模糊控制系统

显然, 参数自整定模糊控制方法的关键在于比例因子的调整规则或模型, 也就是说, 如何根据系统的性能指标来调整比例因子。文献[29], [30], [23]等给出了不同的调整算法, 都是从研究比例因子的变化与系统性能的关系入手。这里我们介绍文献[23]的方法, 它给出了一个较为完善的设计并得到很好的实验结果。

对于一个经典的单变量二维 FLC, 由式(6.42)不难看出, 比例因子 k_1 和 k_2 分别相当于模糊控制的比例作用和微分作用的系数, k_3 则相当于总的放大倍数。 k_1, k_2 增大, 相当于控制器的比例作用、微分作用增强, 而 k_3 增大, 相当于控制器总的放大倍数加大。这是从理论上分析, [29]和[23]的实验和仿真结果也充分证明这一点。由实验数据和理论分析可以总结出比例因子和系统性能的关系如下:

1. k_1 对系统性能的影响

- (1) k_1 越大, 系统调节惰性越小, 上升速率越快。
- (2) k_1 过大, 系统上升速率过大, 产生的超调大, 使调节时间增长, 严重时还会产生振荡乃至系统不稳定。
- (3) k_1 过小, 系统上升速率较小, 系统调节惰性变大, 同时, 也影响系统的稳态性能, 使稳态精度降低。

2. k_2 对系统性能的影响

- (1) k_2 越大, 对系统状态变化的抑制能力增大, 增加系统稳定性。
- (2) k_2 过大, 系统输出上升速率过小, 系统的过渡过程时间变长。
- (3) k_2 过小, 系统输出上升速率增大, 可能导致系统输出产生过大的超调和振荡。

3. k_3 对系统性能的影响

- (1) k_3 增大, 相当于系统总的放大倍数增大, 系统响应速度加快。
- (2) k_3 过大, 会导致系统输出上升速率过大, 从而产生过大超调乃至振荡和发散。
- (3) k_3 过小, 系统的前向增益很小, 系统输出上升速度较小, 快速性变差, 稳态精度变差。

由式(6.41), 要保证系统的控制死区小, 或者说要保证一定的系统稳态精度, k_1 应该足够大。文献[23]根据实际对象允许的最大稳态偏差, 按一定比例先取定 k_1 , 然后由上述比例因子和系统性能的关系, 建立了如下的比例因子整定规则:

- (1) 当系统发散时, 则根据发散的程以较大的幅度减小 k_3 。
- (2) 当系统振荡时, 则根据振荡的程度以适当的程度减小 k_3 。
- (3) 当系统存在稳态偏差时, 则根据稳态偏差的程度以适当的幅度增大 k_3 , 同时以较小的幅度增大 k_2 。
- (4) 当系统过渡过程时间过长时, 则根据过渡过程的时间以较小的幅度减小 k_2 。
- (5) 当超调过大时, 则根据超调的大小以适当的幅度增加 k_2 。

为了定量地刻划超调量、发散程度、振荡程度、稳态误差程度等等一系列的具有模糊性的系统性能指标, 定义如下一组模糊子集的隶属函数:

- (1) 超调量满意的隶属函数:

$$\widetilde{OVS}(AM) = \begin{cases} 1, & 0 \leq AM < P_1 \\ \frac{P_2 - AM}{P_2 - P_1}, & P_1 \leq AM < P_2 \\ 0, & AM \geq P_2 \end{cases}$$

式中, AM 是超调量, P_1, P_2 是根据实际要求给出的两个阈值, 通常 $0 < P_1 < P_2 \leq 100\%$ 。

- (2) 发散程度的隶属函数:

$$\widetilde{OIN}(VMP) = \begin{cases} 0, & VMP < P_7 \\ \frac{VMP - P_7}{P_8 - P_7}, & P_7 \leq VMP < P_8 \\ 1, & P_8 \leq VMP \end{cases}$$

式中 VMP 由下式确定:

$$VMP = [\sum_{i=1}^L OL(2i+1)/OL(2i)]/L$$

这里 $OL(j), j=1, 2, \dots, m$ 表示每轮过渡过程中, 系统输出进入稳态精度所要求的范围之前各次振荡的峰值, m 是峰值的个数。 P_7, P_8 是根据实际要求给出的阈值, 通常 $1 \leq P_7 < P_8 \leq 3, L$ 由下式确定:

$$L = \begin{cases} \frac{m-1}{2}, & m \text{ 为奇数} \\ \frac{m-2}{2}, & m \text{ 为偶数} \end{cases}$$

以上定义可参考图 6.22。

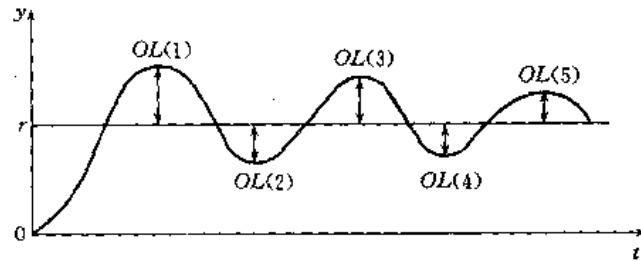


图 6.22 系统设定 R 为阶跃变化的响应曲线

(3) 振荡程度的隶属函数:

$$\widetilde{VM}(VMPP) = \begin{cases} 0, & VMPP < P_5 \\ \frac{VMPP - P_5}{P_6 - P_5}, & P_5 \leq VMPP < P_6 \\ 1, & P_6 \leq VMPP \end{cases}$$

式中:

$$VMPP = \left| \frac{OL(m)}{OL(m-1)} \times \frac{OL(2)}{OL(1)} \right|$$

P_5, P_6 是给定的阈值, 一般 $0 \leq P_5 < P_6 \leq 1$ 。

(4) 稳态误差满意的隶属函数:

$$\widetilde{EAC}(EMAX) = \begin{cases} 1, & EMAX < P_3 \\ \frac{P_4 - EMAX}{P_4 - P_3}, & P_3 \leq EMAX < P_4 \\ 0, & P_4 \leq EMAX \end{cases}$$

式中 $EMAX$ 是稳态误差的平均值, 可按下式计算:

$$EMAX = \left[\sum_{i=-\frac{n}{2}}^n e(i) \right] / (0.5 \times n)$$

其中 $e(i)$ 是第 i 个采样周期的误差, n 是每个过渡过程轮次采样次数的总和。 $0.5 \times n \times T$ 是过渡过程时间的统计平均值, T 是采样周期, P_3, P_4 是给定的阈值, 通常 $0 \leq P_3 < P_4 \leq R_s, R_p$ 是工程上允许的最大稳态偏差值。

(5) 过渡过程时间满意的隶属函数:

$$\widetilde{STIME}(STI) = \begin{cases} 0, & P_9 < STI \\ \frac{P_9 - STI}{P_9 - P_{10}}, & P_{10} \leq STI < P_9 \\ 1, & STI \leq P_{10} \end{cases}$$

式中 STI 是本轮次的过渡过程时间。通常我们可取 $(0.5 \sim 0.9)R_s \leq P_{10} < P_9 \leq (1.1 \sim 1.5)R_s$, R_s 是被控对象单位阶跃扰动的过渡过程时间的统计平均值或估计值。

有了以上隶属函数的定义,再定义参数整定规则中调整量的语言变量:

较大幅度调整 = $\{1/0.8, 0/0.4, 0/0.2\}$

适当幅度调整 = $\{0/0.8, 1/0.4, 0/0.2\}$

较小幅度调整 = $\{0/0.8, 0/0.4, 1/0.2\}$

以上在论域 $\{0.8, 0.4, 0.2\}$ 上定义。

由以上参数整定规则和模糊子集隶属函数的定义和讨论,给出参数自整定模糊控制器的参数整定算法如下:

$$K_3 = K'_3 [1 - \underline{OIN}(VMP) \times 0.8 - \underline{VM}(VMPP) \times 0.4 \\ + (1 - \underline{EAC}(EMAX)) \times 0.4]$$

$$K_2 = K'_2 [1 - (1 - \underline{STIME}(STI)) \times 0.2 + (1 - \underline{OVS}(AM)) \times 0.4 \\ + (1 - \underline{EAC}(EMAX)) \times 0.2]$$

式中 K'_3, K'_2 表示 K_3, K_2 前一轮次的取值。

以上参数自整定模糊控制方法参数整定的轮次是指一个整定周期,原则上要大于被控对象的过渡过程时间。参数整定一般没有必要连续地不间断地进行,可以每一个时间段(如 15min)投入一次,在生产工艺允许的情况下应该在原设定值的基础上加一个阶跃增量并维持一个整定轮次周期。也可以在检测到较大的扰动时,投入参数自整定算法。

参数自整定模糊控制器的参数整定方法可以是多种多样的,读者可以自行设计。

6.3.3 自适应模糊控制

自适应模糊控制又称自组织模糊控制。它能自动地对模糊控制规则进行修改、改进和完善,以提高控制系统的性能。虽然我们可以通过总结归纳操作人员和领域专家的经验来建立模糊控制器的规则库,但实际应用中,对于那些具有非线性、大时滞、高阶次的复杂系统,利用人的经验建立的控制规则也很难完美无缺,一下子就能满足控制要求。况且如果被控对象具有时变性或系统环境不断改变,一成不变的控制规则难以适应对象和环境的变化,达不到满意的控制效果。在这种情况下自适应模糊控制器有着更好的控制性能。

1979 年英国的 T. J. Procyk 和 E. H. Mamdani 提出一种自组织模糊控制器[37],它能在控制过程中不断地调整和修改控制规则,有自适应自学习的能力。下面作一简要介绍。

自适应模糊控制器如图 6.23 所示。它比一般的模糊控制器增加了三个环节:性能量测、控制量校正和控制规则修正。性能量测环节用于测量实际输出特性与希望特性的偏差,以确定输出响应的校正量。控制量校正环节将输出响应的校正量转换为对控制量的校正量。控制规则修正环节修改模糊控制器的控制规则,这样也就实现了对控制量的校正。

1. 性能量测

类似常规的模糊控制器,通常选误差 E 和误差变化率 EC 作为两个参量,用以衡量输出特性与希望特性的偏离情况,并据此给出调整输出特性所需要的校正量 P 。一个输出量校正规则表如表 6.6 所示。

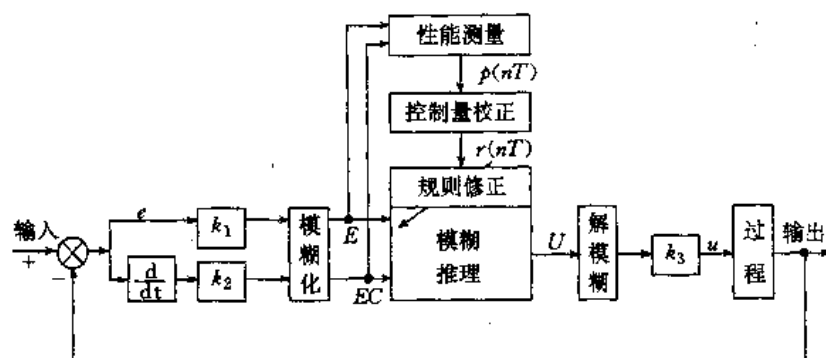


图 6.23 自适应模糊控制系统

表 6.6

<div><div>P</div><div>E</div></div>		NB	NM	NS	NZ	PZ	PS	PM	PB
EC									
NB	PB	PB	PB	PM	ZE				
NM			PM	PS					
NS		PM	PS	ZE	ZE		NS	ZE	
ZE	PM	PM	PS	ZE	ZE	NS	NM	NB	
PS	ZE								PS
PM	ZE				NS	NM			
PB					NM	NB			

P 表示正方向, N 表示负方向, Z 或 ZE 表示零, B 表示大, M 表示中等, S 表示小。

用该表就可以根据偏差 E 和偏差变化率 EC 决定校正输出量 P 。例如当偏差 $E = NM$ 且偏差变化率 $EC = PS$ (即输出特性上升较慢) 时, 所需输出校正量 $P = PS$ (即作正方向小的调整)。又例如, 当 $E = NS$ (或 $E = NZ$) 且 $EC = PS$ 时, 所需输出校正量 $P = ZE$ 。这表明当偏差为负小或负零, 同时输出特性在向正方向变化但很小时, 说明输出特性很快就可能是所期望的特性, 所以不需要作校正。同样从表中可知, 当偏差为负中, 且输出特性上升较快 (即正大或正中) 时, 也不需要作校正等等。

这是一个定性关系表, 在实际应用时, 还要得到相应的定量关系表。

若把偏差 E 的论域作如下分级, 分成 14 档:

$$\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, -0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

把偏差变化率 EC 和校正量 P 的论域都分成 13 档:

$$\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

这样就可以根据表 6.6 构造一个如表 6.7 所示的确定校正量的查询表。

表 6.7

$p(nT)$ 误差 误差变化	给定值以下(负偏差)							给定值以上(正偏差)						
	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
-6	6	6	6	6	5	5	4	0	0	0	0	0	0	0
-5	6	6	6	5	4	4	3	0	0	0	0	0	0	0
-4	6	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
-3	6	6	5	4	3	2	1	0	0	0	-2	-2	-2	0
-2	6	6	5	4	1	1	0	0	0	0	-2	-4	-2	0
-1	5	5	4	3	2	1	0	0	0	0	-3	-5	-3	0
0	4	3	3	3	2	1	0	0	-1	-2	-4	-4	-6	-6
1	2	3	4	3	0	0	0	0	-1	-2	-4	-6	-6	-6
2	0	2	3	2	0	0	0	0	-1	-2	-4	-6	-6	-6
3	0	2	2	2	0	0	0	-1	-2	-3	-4	-6	-6	-6
4	0	0	0	0	0	0	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-6
5	0	0	0	0	0	0	0	-3	-4	-5	-5	-6	-6	-6
6	0	0	0	0	0	0	0	-4	-5	-6	-6	-6	-6	-6

2. 控制量的校正

由性能量测所得到的输出响应的校正量 $p(nT)$, 需要转化为对过程输入即控制器输出的校正量, 并施加于过程, 使系统输出朝着期望的方向变化。设过程的输入校正量为 $r(nT)$, 那么需要建立 $p(nT)$ 和 $r(nT)$ 之间的关系。两者都是变化量, 建立简单的增量模型就可以了。

对于时滞不大的单输入单输出过程, $r(nT)$ 和 $p(nT)$ 间的关系可表示为:

$$r(nT) = Kp(nT) \quad (6.43)$$

式中 K 为校正系数, 它与过程的放大倍数有关, 若输入 $r(nT)$ 和 $p(nT)$ 均归一化, 则 K 为 1。

对于时滞较小的多输入多输出系统, $r(nT)$ 可以按下述方法求得。考虑一个两输入两输出的系统, 其状态方程为:

$$\dot{X} = F(X, U, V)$$

$$\dot{Y} = G(Y, U, V)$$

其中 U, V 为输入。当输入变化很小时, 则输出的变化为:

$$\begin{bmatrix} \delta X \\ \delta \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial U} & \frac{\partial F}{\partial V} \\ \frac{\partial G}{\partial U} & \frac{\partial G}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta V \end{bmatrix}$$

在一个足够短的采样周期 T 中, 当输入变化为 $\Delta U, \Delta V$ 时, 输出变化 $\Delta X, \Delta Y$ 可近似表示为:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} T\delta\dot{X} \\ T\delta\dot{Y} \end{bmatrix} = TJ \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

上式可以建立过程输入变化和输出变化之间的增量模型,用于我们讨论的问题,即

$$\begin{bmatrix} r_1(nT) \\ r_2(nT) \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} p_1(nT) \\ -p_2(nT) \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

对于一般的多输入多输出系统,(6.44)式可以写为:

$$\begin{bmatrix} r_1(nT) \\ r_2(nT) \\ \vdots \\ r_k(nT) \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} p_1(nT) \\ p_2(nT) \\ \vdots \\ p_k(nT) \end{bmatrix}$$

H 矩阵表示了某一输出量和哪些输入量有增量关系。

对于时滞较大的系统,要求控制量提前校正,提前量要根据过程的时滞情况确定。

3. 控制规则的修正

考虑有一定时滞的系统。设时滞为 mT ,当前采样时刻为 nT ,那么过去时刻 $(nT - mT)$ 的控制作用对当前 nT 时刻的输出响应产生影响。设 $e(nT - mT)$, $ec(nT - mT)$, $u(nT - mT)$ 分别表示过去的偏差、偏差变化和控制量,而修正后的控制量为 $u(nT - mT) + r(nT)$,将这些量模糊化处理可得:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(nT - mT) &= F(e(nT - mT)) \\ \tilde{EC}(nT - mT) &= F(ec(nT - mT)) \\ \tilde{U}(nT - mT) &= F(u(nT - mT)) \\ \tilde{V}(nT - mT) &= F(u(nT - mT) + r(nT)) \end{aligned}$$

其中 F 表示模糊化过程。那么 $(nT - mT)$ 时刻原来的控制规则为:

若 $E = \tilde{E}(nT - mT)$ 且 $EC = \tilde{EC}(nT - mT)$ 则 $U = \tilde{U}(nT - mT)$

修正后的控制规则应为:

若 $E = \tilde{E}(nT - mT)$ 且 $EC = \tilde{EC}(nT - mT)$ 则 $U = \tilde{V}(nT - mT)$

上述模糊条件语句形式可表示为模糊关系形式:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1(nT) &= \tilde{E}(nT - mT) \times \tilde{EC}(nT - mT) \times \tilde{U}(nT - mT) \\ \tilde{R}_2(nT) &= \tilde{E}(nT - mT) \times \tilde{EC}(nT - mT) \times \tilde{V}(nT - mT) \end{aligned} \quad (6.45)$$

规则校正的方法可以选为:

$$\tilde{R}(nT + T) = \{\tilde{R}(nT) \text{ but not } \tilde{R}_1(nT)\} \text{ else } \tilde{R}_2(nT)$$

写成逻辑关系形式:

$$\tilde{R}(nT + T) = (\tilde{R}(nT) \cap \bar{\tilde{R}}_1(nT)) \cup \tilde{R}_2(nT) \quad (6.46)$$

式(6.46)就是自适应模糊控制器修改控制规则的方法。式中 $\tilde{R}(nT + T)$ 是修正后的规则, $\tilde{R}(nT)$ 是修正前的规则,也就是上一个采样周期修正后的规则。由 $\tilde{R}(nT + T)$ 以及偏差 $\tilde{E}(nT)$ 、偏差变化 $\tilde{EC}(nT)$ 进行合成,求得控制量 $\tilde{U}(nT)$,经解模糊后就得到精确的控制量的增量,加到系统中去。

控制规则的校正方法不是唯一的。

以上的自适应模糊控制器的控制规则修正方法是基于关系矩阵的修改方法。还有一种方法直接存储并修改规则本身,而不是存储关系矩阵。

由式(6.45), $\tilde{R}_1(nT)$ 可写成:

$$\tilde{R}_1(nT) = \tilde{I}_E \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{I}_U - \tilde{E}(nT - mT) \times \tilde{EC}(nT - mT) \times \tilde{U}(nT - mT)$$

式中 $\forall e \in X, \tilde{I}_E(e) = 1$

$\forall ec \in Y, \tilde{I}_{EC}(ec) = 1$

$\forall u \in Z, \tilde{I}_U(u) = 1, X, Y, Z$ 分别是误差、误差变化和控制作用的论域

$\forall (e, ec, u) \in X \times Y \times Z, \tilde{I}_E \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{I}_U(e, ec, u) = 1$ 。

对上式运用摩根(Morgan)律,得:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1(nT) &= \overline{(\tilde{E}(nT - mT) \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{I}_U) \cap (\tilde{I}_E \times \tilde{EC}(nT - mT) \times \tilde{I}_U)} \\ &\quad \cap (\tilde{I}_E \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{U}(nT - mT)) \\ &= \overline{\tilde{E}(nT - mT) \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{I}_U} \cup \overline{\tilde{I}_E \times \tilde{EC}(nT - mT) \times \tilde{I}_U} \\ &\quad \cup \overline{\tilde{I}_E \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{U}(nT - mT)} \\ &= [\overline{\tilde{E}(nT - mT) \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{I}_U}] \cup [\overline{\tilde{I}_E \times \tilde{EC}(nT - mT) \times \tilde{I}_U}] \\ &\quad \cup [\overline{\tilde{I}_E \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{U}(nT - mT)}] \end{aligned}$$

将上式代入式(6.46),得:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(nT + T) &= [\tilde{R}(nT) \cap (\overline{\tilde{E}(nT - mT) \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{I}_U})] \cup \\ &\quad [\tilde{R}(nT) \cap (\overline{\tilde{I}_E \times \tilde{EC}(nT - mT) \times \tilde{I}_U})] \cup \\ &\quad [\tilde{R}(nT) \cap (\overline{\tilde{I}_E \times \tilde{I}_{EC} \times \tilde{U}(nT - mT)})] \cup \\ &\quad \tilde{R}_2(nT) \end{aligned} \quad (6.47)$$

注意到:

$$\tilde{R}(nT) = \bigcup_i (\tilde{E}_i \times \tilde{EC}_i \times \tilde{U}_i), i \text{ 为规则数}$$

式(6.47)可以化为:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(nT + T) &= \{ \bigcup_i [(\tilde{E}_i \cap \overline{\tilde{E}(nT - mT)}) \times \tilde{EC}_i \times \tilde{U}_i] \} \cup \\ &\quad \{ \bigcup_i [\tilde{E}_i \times (\overline{\tilde{EC}_i \cap \tilde{EC}(nT - mT)}) \times \tilde{U}_i] \} \cup \\ &\quad \{ \bigcup_i [\tilde{E}_i \times \tilde{EC}_i \times (\overline{\tilde{U}_i \cap \tilde{U}(nT - mT)})] \} \cup \\ &\quad \tilde{R}_2(nT) \\ &= \{ \bigcup_i [(\tilde{E}_i \cap \overline{\tilde{E}(nT - mT)}) \times \tilde{EC}_i \times \tilde{U}_i] \} \cup \\ &\quad [\tilde{E}_i \times (\overline{\tilde{EC}_i \cap \tilde{EC}(nT - mT)}) \times \tilde{U}_i] \cup \\ &\quad [\tilde{E}_i \times \tilde{EC}_i \times (\overline{\tilde{U}_i \cap \tilde{U}(nT - mT)})] \} \cup \end{aligned}$$

$$[E(nT - mT) \times EC(nT - mT) \times V(nT - mT)]$$

由上式可以看出,每一条规则 $\underline{E}_i \times \underline{EC}_i \rightarrow \underline{U}_i$ 现在将由三条规则来取代:

$$\begin{cases} (\underline{E}_i \cap \underline{E}(nT - mT)) \times \underline{EC}_i \rightarrow \underline{U}_i \\ \underline{E}_i \times (\underline{EC}_i \cap \underline{EC}(nT - mT)) \rightarrow \underline{U}_i \\ \underline{E}_i \times \underline{EC}_i \rightarrow (\underline{U}_i \cap \underline{U}(nT - mT)) \end{cases}$$

当所有的规则都这样置换以后,再加一条新规则:

$$\underline{E}(nT - mT) \times \underline{EC}(nT - mT) \rightarrow \underline{V}(nT - mT)$$

考虑到以上有些规则是多余的,可以采取以下近似的方法来防止规则数目的膨胀。设 $\underline{E}_i \times \underline{EC}_i \rightarrow \underline{U}_i$ 是一条规则,如果它非常类似于待撤消的规则 $\underline{E}(nT - mT) \times \underline{EC}(nT - mT) \rightarrow \underline{U}(nT - mT)$,即 $\underline{E}_i \cap \underline{E}(nT - mT)$, $\underline{EC}_i \cap \underline{EC}(nT - mT)$, $\underline{U}_i \cap \underline{U}(nT - mT)$ 的隶属函数值均小于等于 0.5 时,则规则 i 可以撤消。对所有的规则均可进行上述处理。

文献[37]中介绍了六个不同对象的自适应模糊控制的仿真结果,有兴趣的读者可参阅。六个控制对象的控制结果说明自适应模糊控制方法能够较好地自动修改控制规则并达到较好的控制效果。

6.3.4 专家模糊控制

专家模糊控制器 EFC(Expert Fuzzy Controller)由 R. M. Tong 提出,1984 年他发表了关于模糊控制系统展望的论文[38],首先提出了这一新的概念。

专家模糊控制是专家系统技术和模糊控制技术相结合的产物。把专家系统技术引入模糊控制之中,目的是进一步提高模糊控制器的智能水平。常规的模糊控制器的魅力所在是它能在一般传统的数学分析方法无能为力时提供一种基于规则的控制方法,而且简单易行。正是这种基于规则的结构以及利用模糊集理论将其转化为实际控制器的有效机制的结合保证了模糊控制方法的成功。但是,常规的模糊控制方法也有它的局限性以及不足之处。其中一个十分重要的不足是控制器的结构过于简单,规则库一般只允许一种格式的规则,规则语言还不足以表达控制复杂过程所需要的启发式知识。而专家系统在这方面则更胜一筹。专家系统技术考虑了更多方面的问题:如是什么组成知识,如何组织如何表达知识,如何应用知识。专家系统方法重视知识的多层次及分类的需要,以及利用这些知识进行推理的计算机组织。

专家模糊控制保持了基于规则的方法的价值和用模糊集处理带来的灵活性,同时把专家系统技术的表达、利用知识的长处结合进来。R. M. Tong 认为,EFC 至少在两方面不同于 FLC,一是 EFC 拥有过程控制更复杂的知识,二是 EFC 可以用更复杂的方式利用这些知识。在 EFC 中,模糊集仍用来描述不确定性,但 EFC 范围更广,能处理更广泛的控制问题。

下面我们说明 EFC 的结构。注意到在现有 FLC 中,控制规则是这种形式:

IF(过程状态) THEN(控制作用)

这里(…)表示基本变量的一些模糊命题。这种语言虽然对于一般的、行为良好的过程

是可以胜任的,但在表达控制知识方面受到很大限制。不管怎样,按常规控制理论类推,以这种方式构成的 FLC 不过是一个将过程状态映射到控制作用的非线性增益控制器。

EFC 则容许更复杂的分级规则,如:

IF〈过程状态〉THEN〈中间变量 1〉

·
·
·

IF〈中间变量 N〉THEN〈控制作用〉

这里中间变量代表一些隐含的不可测状态,它们能影响所采用的控制作用。以这种方式构成的规则使用于确定控制作用的推理更清楚了一些,从而使简单的“激励-响应”控制系统前进一步。

注意,上面所描述的规则全都是由事件驱动,是所谓顺向链接的模式处理,即这些规则在过程的状态同其预先确定的条件匹配时才应用。

此外,EFC 还容许问题的目标及约束函数作为规则的可能。一种由目标驱动的规则将用于改变控制器的结构,比如说从一种控制模式转换为另一种控制模式。例如,假定希望将过程从一个稳定状态驱动到另一个稳定状态(也许是为了响应生产上所需的变化)那么就需要这类形式的规则:

IF〈新目标〉THEN〈初始化规则组 1〉

这里〈新目标〉是当前目标同新目标之间差别的某种陈述,而〈初始化规则组 1〉则指出应采用完全不同的低级规则集。

如上述这些规则的引入对 EFC 的结构有重要的意义。必然地,EFC 比 FLC 应用规则的方法复杂得多。

总之,EFC 提供了一种相当丰富地表达过程控制知识和经验的能力,从而较之常规的 FLC 更增强了处理复杂控制问题的能力。专家模糊控制已经有不少实际应用[25][31]。

著名的控制理论权威 Austrom 在其智能控制的方向[39]一文中指出:模糊逻辑控制,神经网络与专家控制是三种典型的智能控制方法。专家模糊控制是模糊逻辑控制技术与专家系统技术的结合。它们的完美结合应该是互相取长补短,相得益彰,成为智能控制中一个重要的方法。下面我们将要介绍这三种典型的智能控制方法中另外两种方法的结合,即神经网络技术和模糊逻辑控制技术的结合。

6.3.5 神经模糊控制

神经模糊控制(Neuro-Fuzzy Control)是神经网络技术与模糊逻辑控制技术相结合的产物,是指基于神经网络的模糊控制方法。从各种资料来看,人们似乎还没有给这种方法一个统一的名字,我们在这里采用这个较简单的名称。自 1991 年下半年起,日本的一些公司就推出冠以 Neuro-Fuzzy 模式的家电产品,如三洋的微波炉,日本电气的空调器,日立的电饭锅,三菱电机的风扇式煤油加热器等等。人们不再满足于有“Fuzzy”标志的产品,而追求更高档的“Neuro-Fuzzy”产品。神经网络技术和模糊逻辑技术这两种智能技术方

法的结合运用,是人们近年来研究的一个热点。为此,IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS 专门出了一期模糊逻辑和神经网络的专辑,报导了这方面的研究成果。1994 年 IEEE 为了促进多学科渗透和结合,把模糊系统、神经网络和进化计算三个年会合并举行。1989 年成立的日本国际模糊工程研究所也把模糊神经网络控制作为他们的一个研究课题。

上文我们所提及的神经网络是人工神经网络的简称,它是由许多神经元亦称处理单元作为节点以一定方式连接在一起构成的网络,它往往具有分层的结构。神经元是生物神经元的一种近似,而人工神经网络则是对大脑结构和功能的一种低级的模仿。神经网络的基本工作原理是先要提供给它足够的典型的学习样本,这些样本必须能相当完美地描述所希望达到的系统的性能。在神经网络的学习阶段,输入样本数据,按一定的学习算法调整网络连接权重。在学习过程中,网络各权重收敛到一确定的数值,使每个输入样本都产生一个符合要求的输出,即所有的样本都被网络学会。那么在一个未知的新的数据输入后,一个训练好了的神经网络就能做出符合样本数据所体现的输入输出关系的正确响应。

由已有的研究成果可以看出神经网络有很多特点:(1)可以任意逼近非线性。(2)可学习和适应不知道或不确定的系统,如果系统发生了变化,可修改网络连接权重以适应系统的变化。(3)神经网络本质上是并行结构,可以在处理实时性高的场合显示优越性,较之现有计算机的顺序处理要快得多。但要真正实现并行机制还要靠硬件来完成。(4)网络有一定的容错能力,因而具有一定的鲁棒性。以上特点使得神经网络用于自动控制领域具有很大优势,它特别适合用于复杂的、不确定的系统的控制。

神经网络可以处理精确数据,也可以处理模糊信息,这种神经网络称为模糊神经网络 FNN(Fuzzy Neural Networks)。模糊数学创始人 L. A. Zadeh 的助手,也是近两年国际神经网络大会的主席 Bart Kosko 于 1987 年提出了一种模糊联想记忆神经网络 FAM(Fuzzy Associative Memory),是一种著名的 FNN。

FAM 网络的拓扑结构如图 6.24 所示,它由两层网络组成,其中 L_A 层的 n 个单元对应 A_k 的 n 个分量, L_B 层的 m 个单元对应 B_k 的 m 个分量, $A_k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, $B_k = (b_1^k, b_2^k, \dots, b_m^k)$ 。 (A_k, B_k) , $k=1, 2, \dots, p$ 是存储的模糊值模式对。图 6.24 中各单元之间的连线之所以没有画箭头,是因为 FAM 网络是双向联想的。

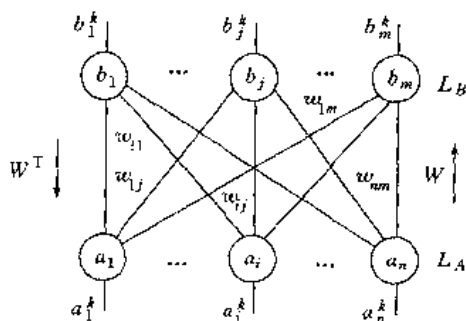


图 6.24 FAM 网络

如果把 A_k 的第 i 个分量视作输入模式第 i 个特征的隶属度, B_k 的第 j 个分量视作输出模式第 j 个特征的隶属度, 这样 A_k 和 B_k 便构成输入和输出模式的模糊集。FAM 网络通过学习最终存储了 p 个模式对 (A_k, B_k) , 并形成下面的联想:

$$B_k = A_k \circ W$$

“ \circ ”为合成运算, W 为连接权矩阵。上式亦可写为:

$$b_j^k = \max_{i=1}^n [\min(a_i^k, w_{ij})], \\ j = 1, 2, \dots, m$$

w_{ij} 为 L_A 层单元 i 到 L_B 层单元 j 的连接权重, $W = (w_{ij})_{n,m}$ 。

若给网络输入 $A, A = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$, 在 L_B 层的模糊联想输出 $B = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_m)$ 为:

$$b_j = \max_{i=1}^n [\min(a_i, w_{ij})]$$

网络是双向的, 也可从 L_B 层输入 B, L_A 层联想出 A 。

FAM 联想时把一个模糊集 $A_k \in [0, 1]^n$ 映射为模糊集 $B_k \in [0, 1]^m$ 。 p 个模式对 (A_k, B_k) 的关系实际上是通过 $n \times m$ 连接权矩阵 W 存储的, 它实际上反映了模糊关系矩阵。当提供 A_k 时, 联想出 B_k , 反之, 则联想出 A_k , 即:

$$A_k \circ W = B_k$$

$$B_k \circ W^T = A_k$$

如果输入的模式最接近 A_k , 那么 FAM 输出的模式就最接近 B_k 。

我们可以把模糊控制规则隐含地分布在 FAM 网络中, 一次联想记忆过程就是一次模糊逻辑推理。

神经网络技术和模糊逻辑控制技术相结合的神经模糊控制方法是人们正在研究和探讨中的问题, 还没有达到很成熟、完善和系统的地步。以下介绍一下目前发表的一些资料中应用的方法。我们把它大致分为两类, 一类是常规的神经模糊控制, 一类是自适应神经模糊控制。

1. 常规的神经模糊控制

常规的神经模糊控制方法是指用一个神经网络实现常规模糊控制器的功能。就神经网络实现的模糊逻辑控制的功能的范围, 又大致可分为两种。一种是神经网络实现模糊控制规则及模糊推理, 另一种则由神经网络实现全部模糊逻辑控制的功能, 前者是一种局部网络化的结构, 后者则是一种全网络化的结构。

(1) 局部网络化结构

局部网络化结构的常规神经模糊控制器如图 6.25 所示。

由图 6.25, 神经网络实现了常规 FLC 的模糊规则库及其推理功能, 而模糊化、解模糊等功能仍由通常的模糊处理来实现。资料[27][28]采用一个三层 BP 网络记忆模糊控制规则并进行模糊逻辑推理。网络输入层输入偏差和偏差变化率的模糊子集, 输出层输出推理所得的控制量的模糊集。输入层神经元对应偏差 e 和偏差变化率 ec 的论域 X 和 Y 的元素, 输出层神经元对应控制量 u 的论域 Z 的元素。例如 $X = \{-6, \dots, -1, 0, 1, \dots, 6\}, Y = \{-6, \dots, -1, 0, 1, \dots, 6\}, Z = \{-7, \dots, -1, 0, 1, \dots, 7\}$, 则网络输入层和输出层分别有

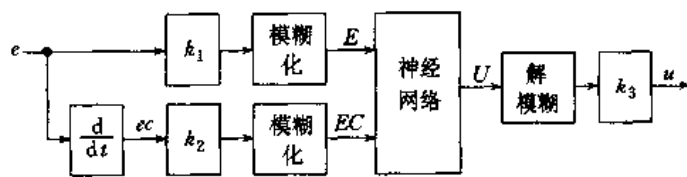


图 6.25 FLC 的局部网络化结构

26 个和 15 个神经元,如图 6.26 所示。

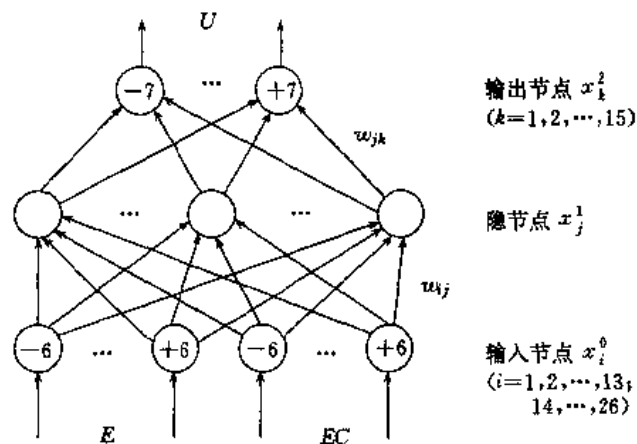


图 6.26 三层神经网络

表示偏差、偏差变化率、控制作用的各个模糊子集的隶属函数一般可取正态分布的高斯函数:

$$G(x, \mu, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

由均值 μ 和均方差 σ 确定。例如 E 上的模糊子集 PM (正中),取 $\mu=4, \sigma=2$,它所对应的模糊概念在前 13 个输入节点上的隶属度分别为 $x_i^0 = G(i-7, 4, 2), i=1, 2, \dots, 13$ 。

在定义了偏差、偏差变化率和控制作用三个语言变量的语言值(即模糊子集)及其隶属函数并建立了模糊控制规则之后,就可以把这些规则转化为神经网络的一组输入、输出样本,采用 Back-Propagation 学习算法训练神经网络,调整网络权重,使得网络实现这组样本所对应的输入输出映射。这样网络就记忆了模糊控制规则。在线运行时,控制器根据实际输入的误差 e 和误差变化率 ec ,用通常的模糊化处理方法转化为相应的模糊子集 \tilde{E} 和 \tilde{EC} ,神经网络进行推理,得到控制作用 \tilde{U} ,控制器再用通常的解模糊方法得到精确的控制作用输出给被控对象。

(2) 全网络化结构

全网络化结构是指模糊控制器的全部功能均由神经网络来实现。这种情况下,神经网络的构造方法也有各种形式[48—54],下面作一简要介绍。

常规的神经模糊控制器的全网络化结构常常采用图 6.27 所示的一种多层前馈神经网络。图 6.27 是一五层模糊神经网络,每层都有明确的涵义。每个神经元的结构如图

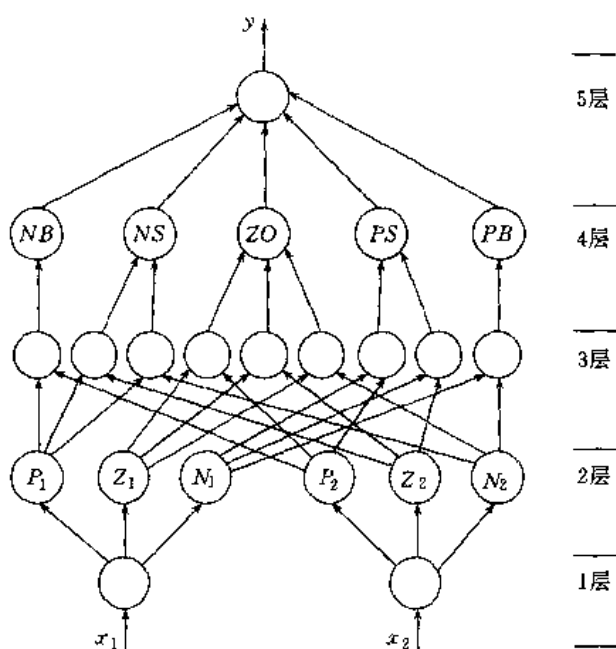


图 6.27 FLC 的全网络化结构

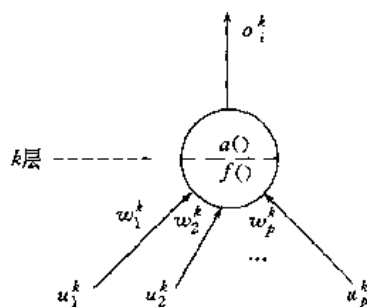


图 6.28 神经元

6.28 所示,它表示第 k 层的一个神经元, $u_1^k, u_2^k, \dots, u_p^k$ 表示它的 p 个输入,可能来自上一层的输出或直接来自输入, $w_1^k, w_2^k, \dots, w_p^k$ 是连接权重。 o_i^k 表示神经元的输出。这些符号的上标表示神经元所在网络中的层数。函数 f 表示节点的净输入:

$$\text{net_input} = f(u_1^k, u_2^k, \dots, u_p^k, w_1^k, w_2^k, \dots, w_p^k)$$

节点的输出即激活值为 net_input 的函数:

$$\text{output} = o_i^k = a(f)$$

在一般的神经网络中, f 常常取输入的加权和而激活值 a 常常取 sigmoid 函数:

$$f = \sum_{i=1}^p w_i^k u_i^k$$

$$a = \frac{1}{1 + e^{-f}}$$

而在实现模糊控制功能的图 6.27 所示的模糊神经网络中,每层节点的 f 和 a 则有不同的定义,它取决于每层神经元在模糊逻辑推理中所表示的涵义。

图 6.27 所示的用于模糊控制的模糊神经网络有较多的层数,一般也有较多的神经元(本图因为只是说明它的工作原理,因而仅安排了较少的神经元)。之所以这样,是因为每一层神经元都显式地表示了模糊逻辑推理中相应的某种涵义。因而它比通常的神经网络更容易理解,也更容易修改。下面我们对它的每一层进一步详细解释。

第一层:第一层神经元为输入节点,表示模糊控制器的输入信号。图 6.27 的神经网络有两个输入节点,可表示输入信号偏差和偏差的变化率。第一层神经元仅把输入值传给下一层,因此有:

$$f = u_i^1(u_i^1 = x_i, i = 1, 2)$$

$$a = f$$

可见第一层的连接权重 $w_i^1 = 1$ 。

第二层:这一层表示输入信号的语言变量的辞集即语言值。每个神经元代表一种语言值,表达为一个隶属函数。为简便计,图 6.27 中两个输入 x_1 和 x_2 每个都定义了三个语言值,即三个模糊子集,比如 P_1, Z_1, N_1 (正,零,负)和 P_2, Z_2, N_2 。那么每个神经元的输出应该是相应的隶属函数。例如一个倒钟形的正态分布的隶属函数为:

$$f = -\frac{(u_i^2 - m_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}$$

$$a = e^f$$

式中 m_{ij} 和 σ_{ij} 分别表示第 i 个输入 x_i 的语言变量的第 j 个语言值的倒钟形隶属函数的中心和宽度。我们可以把第二层的连接权重 w_{ij}^2 作为 m_{ij} 。

第三层和第四层:这两层合在一起表示模糊控制的规则,其中第三层表示规则前件的匹配,第四层表示规则的后件。图 6.27 中,因为两个输入的语言变量各定义了三个语言值,比如 P, Z, N (正,零,负),因而有 $3 \times 3 = 9$ 条规则。输出语言变量则定义五个语言值,比如 PB, PS, ZO, NS, NB (正大,正小,零,负小,负大)。这 9 条规则是:

若 x_1 是 P_1 且 x_2 是 P_2 则 y 是 NB

若 x_1 是 P_1 且 x_2 是 Z_2 则 y 是 NS

.....

若 x_1 是 N_1 且 x_2 是 N_2 则 y 是 PB

第三层执行输入和模糊控制规则前件的匹配。在某时刻,输入分别为 x_1' 和 x_2' ,则前两层就可计算出它们分别对两个输入的各模糊子集的隶属度: $P_1(x_1'), Z_1(x_1'), N_1(x_1')$ 和 $P_2(x_2'), Z_2(x_2'), N_2(x_2')$ 。显然对第一条规则的匹配度(或激活强度)可表示为:

$$\min[P_1(x_1'), P_2(x_2')]$$

也可以定义为:

$$P_1(x_1')P_2(x_2')$$

那么对于一般的情况,当有 p 个输入信号时,第三层节点也有 p 个输入,因此有:

$$f = \min(u_1^3, u_2^3, \dots, u_p^3)$$

$$a = f$$

或者:

$$f = \prod_{i=1}^p u_i^3 = u_1^3 u_2^3 \dots u_p^3$$

$$a = f$$

第三层的连接权重为 1。

第四层节点执行“或”(OR)运算把输入到第四层同一个神经元的激活的规则(它们有相同的规则后件)进行综合:

$$f = \sum_{i=1}^p u_i^4$$

$$a = \min(1, f)$$

因此连接权重为 1。或运算也可采用取大运算等不同算法。

第五层:第五层表示模糊控制的输出,即控制作用 y 。

运行中,第五层神经元起到解模糊的作用。如果第四层第 i 个神经元代表的模糊子集的隶属函数的中心和宽度分别为 m_i 和 σ_i ,那么下列函数用来模仿重心法进行解模糊:

$$f = \sum_{i=1}^p w_i^5 u_i^5 = \sum_{i=1}^p (m_i \sigma_i) u_i^5$$

$$a = \frac{f}{\sum_{i=1}^p \sigma_i u_i^5}$$

第五层的连接权重 $w_i^5 = m_i \sigma_i$ 。

资料[48]介绍了这种网络的详细设计,有兴趣的读者可参阅。

由以上介绍可见,这种神经模糊控制器的网络结构,每个层次都有与模糊逻辑控制相对应的涵义,因而便于理解。还有一种网络则不定义这种涵义,你只是从外部的输入输出关系上把它看作一个模糊逻辑控制的网络,而内部的涵义不明确,不必去管它。资料[54]就是这种设计,用一个 2-6-6-1 结构的四层神经网络构造了一个全网络化的神经模糊控制器,它是一个普通的神经网络。

2. 自适应神经模糊控制

神经网络的一个重要特点就是它的学习能力。上一小节我们讲到的常规的神经模糊控制器在运行前要进行离线的学习,学会模糊控制规则,然后才能投入在线的控制运行。如果我们利用神经网络的学习功能,当被控对象特性发生变化或外界条件发生改变引起控制系统性能变坏时,利用某种性能评价准则和学习机制,使神经网络控制器进行在线学习,调整连接权重,改变控制性能,以适应被控对象特性或外界环境的变化,使系统保持好的控制效果,那么这种思想下就产生了自适应神经模糊控制的方法。自适应神经模糊控制的出发点与 6.3.1.3 小节的自适应模糊控制器的出发点是一样的,只不过实现的手段采用了神经网络的技术。

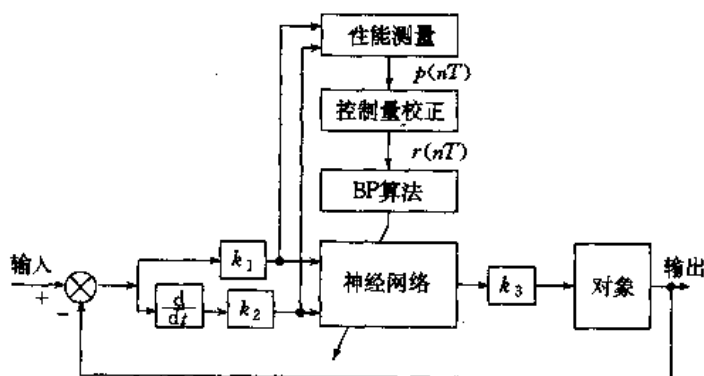


图 6.29 自适应神经模糊控制

自适应神经模糊控制的一种方案如图 6.29 所示[55]。这种方案中基本的模糊控制算法是由一个全网络化结构的神经网络来实现,神经网络经过训练形成输入 e, ec 和输出 u

之间的映射。基本模糊控制器上方的部分实现自适应功能,由性能测量、控制量校正、BP 算法三部分组成。性能测量和控制量校正两部分的功能与 6.3.1.3 小节自适应模糊控制方案(图 6.23)中的相应两部分功能类似,由这两个环节可以得到控制量的校正量 $r(nT)$,即 $(nT-mT)$ 时刻的输出 $u(nT-mT)$ 校正为 $u(nT-mT)+r(nT)$,采用 BP 算法进行一定次数的反复学习,就能修正网络的权值而得到期望的效果。

[52]给出了又一种自适应神经模糊控制方案,如图 6.30 所示。它有两个神经网络,其中一个(FGNC)用作神经模糊控制器,另一个(MNN)作为控制对象的仿真模型。FGNC 网络用 BP 算法学习,用梯度下降法调整连接权重,使得误差函数:

$$E = \frac{1}{2}(r(t) - y(t))^2$$

最小。由于在学习算式中有的项无法由受控对象直接得到,它的值来自对象模型 MNN。

自适应神经模糊控制需要神经网络的在线学习,因而学习速度是个关键问题,研制和应用具有在线学习能力的神经网络芯片,则就有可能实现高速学习能力,大大增强实时性,加快自适应神经模糊控制实用化。

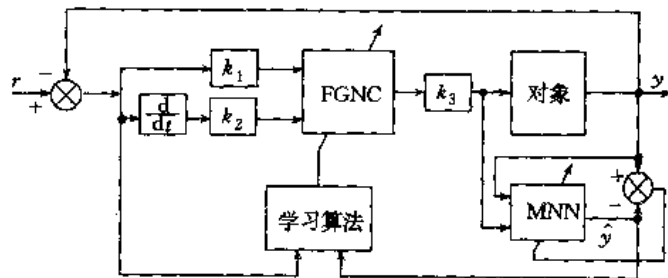


图 6.30 自适应神经模糊控制
(另一方案)

6.3.6 多变量模糊控制

一个多变量模糊控制器有多个输入变量和输出变量,如 6.2.4.1 小节的图 6.11 所示。直接建立多变量模糊控制器的控制规则是困难的,模糊控制规则的维数会很高,而人的经验控制的逻辑思维难以达到。从另一个角度讲,一个 MIMO 系统,模糊规则的条数是系统变量数的指数函数,当维数较大时,要构造基于规则的模糊控制器是非常困难的[56]。而且,由于规则维数高,模糊关系 \tilde{R} 的维数高,因而 \tilde{R} 矩阵会包含很多的元素,变得庞大复杂。因此,多变量模糊控制器的设计一般要采用降维处理,进行结构分解,分解为多个简单的模糊控制器的组合形式。但这种设计方法是人们正在研究中的,尚不成熟完善,有待进一步地研究。这里作一简单介绍。

资料[58]介绍了多变量模糊控制器的一种结构分解方法。为简化计,以一个 3 输入 2 输出的系统为例:

输入: x_k , 对应论域 X^k , X^k 包含元素个数 $p_k, k=1,2,3$ 。输出: y_j , 对应论域 Y^j, Y^j 包含元素个数 $q_j, j=1,2$ 。模糊控制规则为:

若 x_1 是 $\tilde{X}_1(1)$ 且 x_2 是 $\tilde{X}_2(1)$ 且 x_3 是 $\tilde{X}_3(1)$ 则 y_1 是 $\tilde{Y}_1(1)$ 且 y_2 是 $\tilde{Y}_2(1)$

若 x_1 是 $\widetilde{X}_1(2)$ 且 x_2 是 $\widetilde{X}_2(2)$ 且 x_3 是 $\widetilde{X}_3(2)$ 则 y_1 是 $\widetilde{Y}_1(2)$ 且 y_2 是 $\widetilde{Y}_2(2)$

.....

若 x_1 是 $\widetilde{X}_1(n)$ 且 x_2 是 $\widetilde{X}_2(n)$ 且 x_3 是 $\widetilde{X}_3(n)$ 则 y_1 是 $\widetilde{Y}_1(n)$ 且 y_2 是 $\widetilde{Y}_2(n)$

共 n 条规则。那么模糊规则表示的模糊关系 \widetilde{R} 为:

$$\widetilde{R} = \bigcup_{i=1}^n [(\widetilde{X}_1(i) \times \widetilde{X}_2(i) \times \widetilde{X}_3(i)) \rightarrow (\widetilde{Y}_1(i) \times \widetilde{Y}_2(i))]$$

\widetilde{R} 的维数为 5, 元素个数为 $p_1 \times p_2 \times p_3 \times q_1 \times q_2$ 。

经过结构分解和一定的简化近似处理, 上述 3 输入 2 输出的模糊控制器可以表示为:

$$\widetilde{Y}_j = \bigcap_{k=1}^3 \widetilde{Y}_{kj}, \quad k = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

$$\widetilde{Y}_{kj} = \widetilde{X}_k \circ \widetilde{R}_{kj}$$

式中 \widetilde{X}_k 是某一时刻的输入信号。上式即:

$$\widetilde{Y}_1 = (\widetilde{X}_1 \circ \widetilde{R}_{11}) \cap (\widetilde{X}_2 \circ \widetilde{R}_{21}) \cap (\widetilde{X}_3 \circ \widetilde{R}_{31})$$

$$\widetilde{Y}_2 = (\widetilde{X}_1 \circ \widetilde{R}_{12}) \cap (\widetilde{X}_2 \circ \widetilde{R}_{22}) \cap (\widetilde{X}_3 \circ \widetilde{R}_{32})$$

式中:

$$\widetilde{R}_{kj} = \bigcup_{i=1}^n (\widetilde{X}_k(i) \rightarrow \widetilde{Y}_j(i)), \quad k = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

是分解后的分模糊关系, 是二维的。

上述结构分解后的形式也可以写成矩阵的形式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widetilde{Y}_1 \\ \widetilde{Y}_2 \end{bmatrix}^T &= [\widetilde{X}_1 \quad \widetilde{X}_2 \quad \widetilde{X}_3] * \widetilde{R}_s \\ &= [\widetilde{X}_1 \quad \widetilde{X}_2 \quad \widetilde{X}_3] * \begin{bmatrix} \widetilde{R}_{11} & \widetilde{R}_{12} \\ \widetilde{R}_{21} & \widetilde{R}_{22} \\ \widetilde{R}_{31} & \widetilde{R}_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式中 $*$ 代表 $\cap - \circ$ 运算。

可见原来 5 维的元素数为 $p_1 \times p_2 \times p_3 \times q_1 \times q_2$ 的模糊关系 \widetilde{R} 分解为模糊关系 $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2$ 包括六个分模糊关系 $\widetilde{R}_{kj} (k=1, 2, 3, j=1, 2)$, 它们是二维的。 \widetilde{R}_1 的元素个数为: $p_1 \times q_1 + p_2 \times q_1 + p_3 \times q_1 + p_1 \times q_2 + p_2 \times q_2 + p_3 \times q_2 = (p_1 + p_2 + p_3) \times (q_1 + q_2)$, \widetilde{R}_2 也是二维的。 \widetilde{R}_2 比 \widetilde{R} 要简化得多, \widetilde{R} 的元素个数为 $p_1 \times p_2 \times p_3 \times q_1 \times q_2 \gg (p_1 + p_2 + p_3) \times (q_1 + q_2)$ 。

这种结构分解形式也可以用图形表示, 如图 6.31 所示。由图 6.31 可见, 这种结构分解有相当规范的形式。

虽然结构分解后 \widetilde{R}_s 有着规范的形式而且比分解前的 \widetilde{R} 要简化得多。但这种方法使用的结构分解是近似的, 不是严格的推导结果, 因而会损失精度。

多变量模糊控制器的一种比较实用的形式是分层多变量模糊控制器, 或称分级多变量模糊控制器, 它采用分层多规则集结构[60]。每个分规则集一般为常规的较为简单的结构形式, 但它们分为不同的层次, 作用也不完全相同。在实际的工业生产过程控制中, 当有多个输入变量时, 它们对控制的作用也往往不完全一样。有的变量可以用它们来判断过程状态, 或者判断工艺阶段, 而在不同的过程状态或不同的工艺阶段中可能使用不同的控制

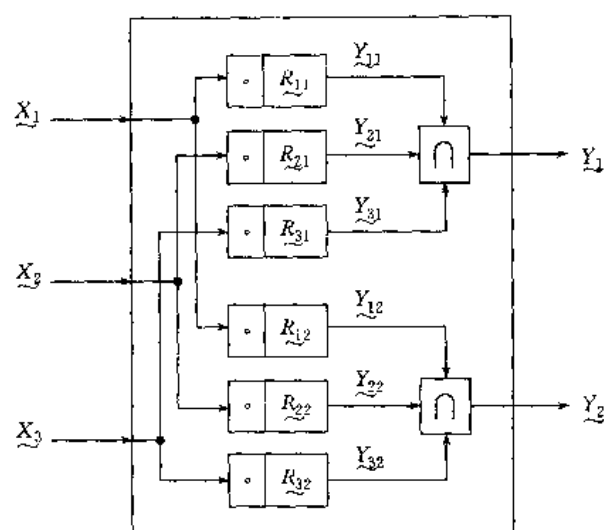


图 6.31 多变量模糊控制器的结构分解

规则,这样可以更有针对性,取得更好的控制效果。这些输入变量可以称为全局变量。全局变量组成的模糊推理语句构成的规则集用来判断过程状态或工艺阶段,作为高层的规则集。而低层的规则集则针对不同的过程状态或工艺阶段进行模糊控制。低层模糊集使用的输入变量一般是系统的受控变量或与之直接相关的过程变量,我们称它们为局部变量。这样我们就把一个多变量模糊控制器分解为一个有层次的多个简单的规则集组成的结构形式。图 6.32 就是二层的结构形式。

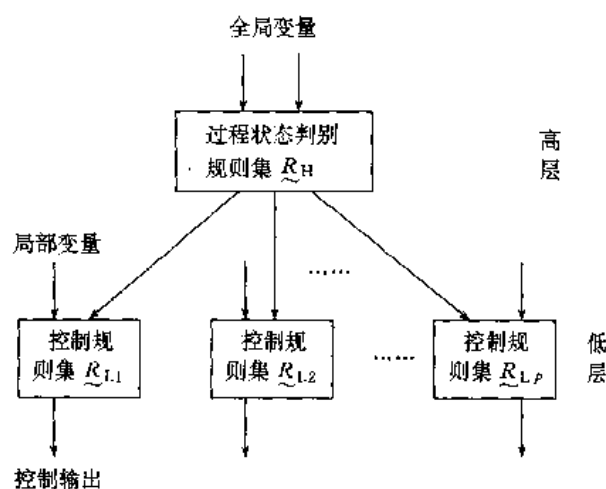


图 6.32 分层多规则集结构

图 6.32 所示的模糊控制器可用如下的规则来描述:

高层 \tilde{R}_H : 若全局变量 1 是 \tilde{GV}_1 , 且全局变量 2 是 \tilde{GV}_2 , 则过程状态是 k , 选用控制规则集 $\tilde{R}_{Lk}, k=1, 2, \dots, p$ 。

低层 \tilde{R}_{Lk} : 若局部变量 r 的误差是 \tilde{E}_{rm} 且误差变化率是 \tilde{EC}_{rm} 则控制作用是 \tilde{U}_{rm} 。

其中下标 i, j, m, n 用来区分各变量所定义的不同的模糊语言值。

分层多变量模糊控制器各层的规则集一般都有简单的结构,低层的各过程状态下的控制规则集往往是常规的单变量模糊控制器的形式,因此它们可以根据不同过程状态或工艺阶段下的特点来建立控制规则。高层的过程状态或工艺阶段判别的规则可以根据工艺专家、操作人员的知识、经验结合生产过程的机理分析选择合适的全局变量而建立。因此,分层多变量模糊控制器同样降低了模糊控制规则的维数,简化了模糊关系 \tilde{R} ,而且通过划分全局变量和局部变量及通过划分不同的过程状态等对建立各个分规则集提供了一定的思路和方法,因此有一定的实用价值[60][63][64]。

资料[59]也给出了一个分级多变量模糊控制器的结构,它把对系统影响最大的变量选为一级变量,次之的选作二级变量,依次类推,构成不同级的规则,一级规则有如下形式:

$$\text{if}(x_1 \text{ is } a_{1,1}, x_2 \text{ is } a_{1,2}, \dots, x_{n_1} \text{ is } a_{1,n_1}) \text{ then (output } y_1 \text{ is } b_1)$$

第 i 级 ($i > 1$) 有如下形式:

$$\text{if}(x_{N_i+1} \text{ is } a_{i,1}, \dots, x_{N_i+n_i} \text{ is } a_{i,n_i}) \text{ and } (y_{i-1} \text{ is } b_{i-1}) \text{ then (output } y_i \text{ is } b_i)$$

其中 $N_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j \leq n$ 是 $1 \sim (i-1)$ 级出现的系统变量数的总和, n_j 是第 j 级中出现的系统变量个数, $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是系统变量, y_i 是系统第 i 级输出。在以上多级结构中,第一级给出近似的输出 y_1 , 而 y_1 又被第二级规则修正为 y_2 , 2 级规则不仅包含二级变量而且引入了第一级的输出 y_1 ……, 整个控制过程依次重复。

6.4 模糊逻辑集成电路

6.4.1 概述

实现模糊逻辑控制除了在通用计算机上用软件实现之外,还可以用模糊逻辑集成电路硬件来实现。一般情况下,实现模糊逻辑控制并不需要用专门的硬件,在通用单片机上实现模糊逻辑控制算法效果就令人满意。但采用模糊逻辑芯片构成的硬件模糊控制器有着它的优势,它的模糊推理的速度非常之快,例如用模糊逻辑单片机 NLX230 实现的速度要比软件实现的速度快两个数量级。另外采用模糊逻辑芯片后可以使主 CPU 腾出时间执行其它任务,因而提高了整个系统的效率,同时也减少了软件开发的工作量。随着模糊逻辑芯片价格的降低,它在模糊控制系统中的应用会越来越多。

世界上第一块具有推理能力的模糊逻辑芯片 1985 年问世。在美国 AT & T 贝尔实验室工作的户贝(Togai)和渡边(Watanabe)博士宣布用 CMOS 数字技术研制成功电压驱动的模糊逻辑推理集成电路。这种芯片用 4 位 16 个离散值(0000~1111)表示隶属函数,模糊推理采用 Max—Min 方式,工作频率为 20.8MHz,推理速度达到 8 万 FLIPS(Fuzzy Logic Inference Per Second)。而后户贝去加利福尼亚州自己组建了模糊逻辑专业公司 Togai Infralogic 公司,并研制生产出了著名的 FC110 数字模糊处理器。

自模糊逻辑芯片研制成功之后,日本、美国、德国等许多公司都积极从事这方面的研制开发工作,推出了许多商品化的模糊逻辑芯片。日本立石公司在美国伊利诺州的子公司

Omron 电子公司 1990 年推出数字模糊处理器 DFP(Fuzzy Logic Processor) FP-3000, 以后又陆续推出了 FP-3010 和 FP-5000 系列。日本富士通公司推出了单片模糊控制器 MB94110 系列, 将模糊推理器与原有的 4 位微处理器、ROM、RAM、模入、模出、串行输入/输出、数字输入/输出、定时器等集成在一块芯片上。日本冲电气工业公司(OKI)是世界上最早从事模糊处理器研制的公司之一, 它们生产了 MSM91U044 和 MSM91U045 世界上最快速的数字模糊芯片, 在两个输入变量, 30 条规则的情况下处理速度可达 7.5MFLIPS。1992 年在德国汉诺威工业博览会上第一次展示了由西门子公司和 Inform 公司联合研制的模糊微处理器 Fuzzy-166, 并宣称第三代模糊处理器在世界上诞生。1992 年美国佛罗里达州的 American NeuraLogix 公司推出了 NLX-230 模糊单片机。

下面就一些知名的模糊逻辑芯片作一简单介绍。

6.4.2 数字模糊处理器(DFP) FC110

美国加州的 Togai InfraLogic 公司 1990 年推出的数字模糊处理器 FC110, 是用模糊计算加速(FCA——Fuzzy Computational Acceleration)技术开发的一种 68 脚超大规模集成电路芯片。它既可用于加速模糊逻辑的推理计算, 也可作为一般主微处理机使用。时钟频率 10MHz, 推理方法 MAX-MIN 和 MAX-PROD。这种芯片每秒钟可处理 10 万条规则产生 6 万个计算输出结果。它最多可支持 128K 字节的知识库, 在该知识库中可允许有 800 条以上的规则和最多有 256 个“IF”和 256 个“THEN”以及多达 1024 个输入和 1024 个输出。指令系统有 18 条模糊运算指令。它与宿主机的通信是用一片 256 字节的双端口 RAM 相连, 片内 RAM 中有 256 个字节用于存放变量数据, 64 个字节用于与主处理器共享, 另外保留 192 个字节存放计算中间结果。它有六种不同的寄存器寻址计算方式, 这给设计人员提供了相当灵活的手段。这种模糊处理器的开发环境包括模糊编程语言(FPL——Fuzzy Programming Language)编译器、汇编器、连接器和图形模糊模拟工具 TILShell。

FC110 模糊处理器有如下一些附加指令:

- ADD: 带进位的算术加法指令。
- CMP: 算术比较指令。
- DEFUZ: 解模糊(Defuzzification)指令。
- DIV: 除法指令。
- FZAND: 模糊逻辑“与”指令。
- FZOR: 模糊逻辑“或”指令。
- HALT: 暂停和等待系统报文指令。
- JMP: 转移指令。
- JSR: 调用子程序指令。
- LHS: 计算规则中前件(“IF”部分)的指令。
- LOAD: 送数指令, 相当于 Z80 中的“LD”或 8088 中的“MOV”指令。
- MODE: 用来设置 FC110 操作和功能模式的指令。
- MULT: 乘法指令。

NOP: 空操作指令。

RHSC: 计算规则中后件(“THEN”部分)的指令,采用的方法是重心法。

RHSH: 计算规则中后件(“THEN”部分)的指令,采用的方法是高度法。

RTS: 子程序返回指令。

STORE: 存储指令,可用于寄存器,也可以用于存储器。

SUB: 带借位的减法指令。

应用这种芯片,可在三种硬件平台中选择一种。第一种是 AT 加速器板。它需要一台 AT 级以上的机器和 20MHz 的 FC110 再加上 128K 字节的 RAM 用以存放知识库。第二种是 FC110 开发模板,它含有 20MHz 的 FC110 数字模糊处理器,并带有 128K 字节存放知识库的 EPROM。第三种是单板模糊控制器板卡,它除了有开发模板所有的特性外,还有八个中断级、八个 8 位的模拟输入、四个 8 位的模拟输出、一个串行接口和两个 8 位的并行输入输出口。

开发软件 TILShell 可以建立、测试、调试和模拟模糊逻辑控制器。使用这个软件包的第一步是建立说明该应用的输入输出和它与模糊处理要素相互关系的项目图形。接着就设置各种对象的属性,例如存储类型和数据范围,用图形编辑器通过描绘或者指定一个产生所希望曲线的数学函数去定义隶属函数的形状。下一步用模糊编辑器去构造规则库。为了检验这个工作,可到 TILShell 中对该应用的操作进行模拟画出其三维响应曲面。

同时该公司用此芯片开发出如下一系列系统插件板。

(1) SBus 加速板。这是为在 SBus 机器上进行复杂模糊逻辑应用而设计的高性能单板模糊逻辑加速器。板上有两片 20MHz 的 FC110 数字模糊处理器芯片,它可以比常规处理器更快地计算复杂的模糊问题。

(2) AT 加速板。用 FC110 实现的 AT 加速板是为 PC/AT 及其兼容机而设计的高速模糊规则处理板。

(3) C/S(Classification/Sorter)装置。分类/排序装置是为高速模式识别系统和其它分类操作加速的需要而设计的。

(4) SBFC 板。单板模糊控制器(SBFC)是一个以 FC110 为基础带有模拟和数字输入、输出的嵌入式控制模块。

(5) SA 板。这是独立的开发模板,它以 FC110 为基础,为低价格面包板应用而设计的模板。

(6) VME 板。该板装有多达四片 FC110 处理器,这是为 VME 总线环境而设计的模板。

6.4.3 模糊单片机 NLX230

American Neuralogix 公司 1992 年推出了 NLX-230 模糊单片机,它是一种采用 1.25 μ m CMOS 技术 40 脚 DIP 封装的超大规模集成电路,是一种神经网络技术的模糊逻辑推理机。

NLX-230 模糊单片机有 8 个输入脚和 8 个输出脚对应 8 位输入和 8 位输出,通过 3 位地址控制 8 选 1 多路转换器进行切换,8 路分时占用这 8 位输入和 8 位输出。每片有 16

个模糊化器,最多允许有 64 条 16 位的规则。每个输出可以用任何一个或所有的规则。模糊化器为每个输入计算 5 位的隶属函数的项值。芯片初始化包括加载定义隶属函数的位图、输出范围和最多 64 个规则。这种芯片主要是补充或者补偿常规微处理机在实现模糊逻辑控制性能方面的不足,或者用于嵌入式控制系统,以取代常规微处理机用纯软件实现模糊逻辑控制的方法。

NLX-230 的引脚定义如下:

DI0~DI7:8 根数据输入线;

DO0~DO7:8 根数据输出线;

STB:选通输出线;

MA0,MA1,MA2:8 选 1 多路转换器的三位地址;

CS:片选输入线;

R/W:读写操作输入线,当 $R/\overline{W}=1$ 时为读操作,当 $R/\overline{W}=0$ 时为写操作;

M/\overline{S} :主从工作模式控制输入线,当 $M/\overline{S}=1$ 时为自主工作模式,当 $M/\overline{S}=0$ 时为从属工作模式;

SK:接串行 EEPROM 的时钟线,当 $M/\overline{S}=0$ 时该脚为输入线,当 $M/\overline{S}=1$ 时为输出线;

D_I :串行数据输入线;

D_O :串行数据输出线;

\overline{RST} :复位输入线,低电平有效;

X_I :晶振输入线;

X_O :晶振输出线;

CLK:时钟输出线;

V_{DD} :工作电源输入线,通常用 +5V;

V_{SS} :地线。

NLX-230 模糊单片机有两种不同的结构操作方式:自主方式和从属方式。不同的操作方式由主从工作模式控制输入脚 M/\overline{S} 上的电平决定,当 $M/\overline{S}=1$ 时,为自主工作模式,当 $M/\overline{S}=0$ 时,为从属工作模式。在自主方式下,可以自动对外部 EEPROM 加载配置数据,这些配置数据是用 ADS-230 开发系统,根据调试后隶属函数和模糊控制规则写入 EEPROM 的。在从属工作模式下,配置数据靠外部逻辑来加载。外部逻辑可以由 CPU 或其它逻辑电路提供。

NLX-230 可用于改进常规 PID 控制器、远程通信、智能应用系统、模式识别、自动化应用系统、机器人以及近似推理和专家系统等。

NLX-230 不像大多数模糊产品那样隶属函数的形状对性能有较大的影响,其模糊化处理不需要关心隶属函数的形状,只要考虑确切的输入值离隶属函数的中心点有多远就行了。另外,有两类隶属函数的技术处理,包含的函数要定义属于某个模糊集合值的程度;排斥的函数要定义不属于某个模糊集合值的程度。

当计算一个输入的模糊值,模糊化电路首先计算确切输入值与中心点之间差的绝对

值,对于包含的函数,如果这个距离的值小于隶属函数的宽度,模糊化器就通过从最大可能值减去这个距离来计算模糊输出。如果距离是大于函数的宽度,那么模糊输出就是零。对于排斥的函数,结果比较简单,其模糊输出就是确切输入值与函数的中心点之间距离的绝对值。NLX-230 的解模糊判决利用了神经网络实现。NLX-230 的输出方式有两种:立即方式和累加方式。在立即方式,确切输出值就是作用值加上用户所定义的初始值。对累加方式,确切输出值则等于新的输出值再加上前面的输出值。在两种方式中其加法都用限幅算法以防止其和溢出。

基于 NLX-230 的 ADS-230 开发系统包括一块 XT 板,时钟是 14MHz,八个 8 位模拟输入和输出,八个 8 位的数字 I/O 和一片接在外部总线上的 EEPROM。建立一个应用的第一步是写一个指定模糊处理器运算的规则集合文件。第二步,通过把以上的定义加载到板上,并且用纯软件模拟方式运行以测试其构造。当在开发板上运行时,可选择手动单步、分段、连续或者跟踪操作。

6.4.4 模糊微处理器 Fuzzy-166

Fuzzy-166 是德国西门子公司和 Inform 公司联合研制的模糊微处理器,它与其它模糊芯片的不同之处是它是在现有的 16 位微处理器 80C-166(西门子产品)的基础上增加了一个模糊单元。

该芯片提供 10 个模拟输入通道和 60 个数字输入/输出通道,并拥有标准的指令集和模糊指令集。Fuzzy-166 的三个模糊指令集为:模糊化指令、模糊推理指令和解模糊指令。这些指令又能被参数化,因此能得到大量不同的模糊指令。它可使用 ANSI C 编译器或 RISC-汇编,还可使用扩展了的软件 Fuzzy-TECH,该软件提供了一个完整的图形开发环境,同时,它还可在转换到目标硬件前,对模糊系统进行在线方式的模拟和优化。这一模糊微处理器的一个优点是它与标准的 80C-166 管脚插接兼容,因而在使用时十分方便。Togai Infralogic 公司的 FC110,在使用时需要附加硬件来配备一个全新的开发系统,而 Fuzzy-166 芯片则完全不需要这样做,它可在现存的系统中进行替换和进行模糊处理。

1993 年春,德国西门子公司又研制了模糊协处理器(Fuzzy Coprocessor) SAE81C99。该芯片上有 8K 字节的 ROM 作为知识库存储器(Knowledge Base Memory,简记 KBM),并有一个可由外部操纵的知识库接口开关,此开关也可以与外部的 ROM(知识库)相接,规则和隶属度函数就存储于内部或外部的知识库中。模糊协处理器的输入/输出量都是精确值。模糊协处理器的计算能力是每秒 790 万条规则,这些计算工作是直接由硬件完成的,规则的推理以 60 位宽度进行,在一个时钟周期中允许四个精确的输入数据的平行处理。

精确的数据通过微处理器接口写入模糊化单元,知识库接口给予它相应的隶属度函数,然后运用规则,进入推理单元,在此时同样使用知识库的数据,最后由解模糊单元产生一个精确的输出数据,它进入微处理器接口,由主机读取。在运用规则、推理和解模糊运算时都各有 2 种算子可以选用,也就是总共可运用八种不同的处理方法,进行编程。当具有八个输入变量(每个输入变量分为 7 级),一个输出变量(分成 8 级),及 256 条规则,而寄存器读写时间为 $2\mu\text{s}$ 情况下,此协处理器计算一个输出的精确数据的时间约为 $80\mu\text{s}$ 。这

一模糊协处理器的计算速度大大超过了软件的处理速度,并且经过压缩也大大减少了存储器的容量。SAE81C99 也能通过软件工具 Fuzzy-TECH-81C99,在图形界面上进行编辑。

这一模糊协处理器可作为 SIEC051 和 80166 系列控制器的外围设备而使用,并可集成到一个芯片上,存储容量可根据需要灵活变化。

6.5 模糊控制开发工具

6.5.1 概述

一个模糊控制系统的设计调试过程,有大量工作是设计调整模糊控制器的参数,包括隶属函数、控制规则等等,这是一种重复耗时的工作。为了更快更有效地完成这一工作,人们研制了不少模糊逻辑开发工具,它能有效地帮助人们进行模糊控制器的设计、分析、调试、修改细化等工作。

一个模糊控制系统的开发工具应该给设计者提供下列支持:

- 系统结构的建立
- 隶属函数的定义
- 规则库的建立
- 控制系统的仿真和行为分析
- 错误查找和排除

目前现有的模糊控制系统开发工具大部分是在 IBM PC(或兼容机)平台上,相当一部分是在 Windows 环境下,高效直观的图形界面为构造模糊系统提供了一个有价值的支持,使人们大大缩短了开发周期。

相当一部分开发工具都针对某种或某些目标系统,如单片机或模糊逻辑芯片等,可以生成目标系统的代码。而有的开发工具则仅为标准语言产生源代码,如 ANSI C。

目前推出的模糊逻辑开发工具有很多种产品。如 Motorola 公司的产品 Freeware,为其公司的单片机产品 M68HC05, M68HC11, M68HC16 和 68300 系列实现模糊逻辑处理提供开发工具。Motorola 与 Apronix 公司合作,推出了模糊推理开发环境 FIDE(Fuzzy Inference Development Environment)。Togai Infralogix 公司推出了一个面向对象的图形窗口形式的模糊系统开发软件包 TIL Shell。Fuzzy TECH 是德国 Inform 公司开发的欧洲最成功的模糊系统工程开发工具,是一个全部用图形接口实现的支持模糊系统工程所有设计步骤的 CASE 工具。Nea Fuz4 和 NeuFuz4-C 是美国国家半导体公司研制的基于神经网络的模糊逻辑开发软件。日本立石公司研制模糊控制开发工具 FS2000,从知识的设定、评价到系统实际控制支持全过程的开发。日本富士公司在 FRUITAX 系列中,除了有软件通用模糊控制器 FRUITAX-RX,L 外,还有个人机开发支持工具 FRUITAX-FS, FR, 3D 等产品。日本东芝的集成模糊控制系统开发工具 IFCS(Integrated Fuzzy Control Design System)也是从制定规则、仿真到实际控制的全过程支持其开发工作。日本三菱电机的模糊控制用专家系统 ERIC(Extended Rule-Based System for Intelligent Control)是具智能型的开发工具。日本日立公司的模糊逻辑开发工具是 MicroFPL。另外还有 1993

年德国 Transfer Tech GmbH 推出的 Fuzzy Control Manager 及 MIT GmbH 1994 年推出的 Data Engine 等。此外还有一些模糊逻辑开发工具仅仅生成标准语言的源代码,如 HyperLogic 公司的 Cubicale,Byte Craft 公司的 Fuzzy-C,Byte Dynamics 公司的 Fuzzy Logic Designer 等,它们大多生成 ANSI C 代码。

下面就一些开发工具作一简单介绍。

6.5.2 FIDE

Motorola 公司与 Apronix 公司合作,由 Apronix 公司推出了功能强大的模糊推理开发环境 FIDE(Fuzzy Inference Development Environment)。FIDE 的开发平台是 IBM-PC 及兼容机,Windows3. X。FIDE 可生成 Motorola 6805,68HC05,68HC11 和 Omron FP-3000 单片机汇编代码的模糊逻辑开发工具。FIDE 具有很强的推理能力,用户只要有最基本的模糊逻辑知识就可以建立和优化复杂的模糊应用。这是一个覆盖模糊应用软件开发全过程的软件工具,包括从初始概念到生成可运行码。

应用时,首先用模糊推理语言 FIL(Fuzzy Inference Language)(这是一种中间语言)去写定义输入输出变量的源代码和推理规则。按着用图形编辑器画出函数的形状以建立隶属函数。要把隶属函数定义存储起来,编辑器把图形编译成模糊推理语言并且把它与模糊应用连接起来。

FIDE 从系统的近似描述开始,并用调试工具控制系统行为,然后再对系统特性进行精细调节,直到满足设计要求时为止。在设计完成后,FIDE 可以自动生成所需要的 Motorola 单片机系列的汇编源程序代码。FIDE 把模糊的设计,调试和模拟的整个开发过程都集成在同一个开发环境中。

FIDE 有两级工作方式:FIDE 推理单元设计方式和整个系统设计方式。

FIDE 推理单元(FIU——Fide Inference Unit)是 FIDE 的基础构造模块,它描述的源文件由 FIU 系统输入和输出变量定义、隶属函数、规则、推理方法和解模糊等组成。在这个 FIU 源文件中的信息被认为是一个“单元”,它是通过指定隶属函数和规则来开发的。

一个系统可能有多个推理单元和传统的执行单元组成。FIDE 把在此之前已编译和测试过的 FIU 与非模糊编码单元连接起来,构成一个有机的整体。

应用 FIDE 进行模糊控制系统开发的步骤如下。

1. 编辑和编译

建立 FIU 的第一步是通过建立输入、输出变量名、隶属函数的特征等来编写源代码。编写源代码的语言称为模糊推理语言 FIL(Fuzzy Inference Language)。在编辑一个 FIU 源文件时应该包括以下部分:输入变量,输出变量,规则和推理方法。建立好源文件后下一步就是对源代码进行编译。如果编译中发现源码中有语法错误,它将在屏幕下的一个信息窗口给出错误报告,以便修改。

2. 分析、跟踪、模拟调试

FIDE 提供了较强的系统调试的功能。调试工具包括:MF—Edit(隶属函数编辑)功能、Analyzer(分析器)、Tracer(跟踪器)和 Simulator(模拟器)。

MF—Edit:用图形修改隶属函数。

Analyzer;可显示三维响应函数,也可以跟踪任何不正常的点,而找回相应的源码。

Tracer;对给出的输入值,用户可以监视输出,并进行一步一步的跟踪返回源码。

Simulator;可用图形方式看到时间阶跃函数的输入和输出值。

这些工具被用来检查和修正源码中的错误,还可以用这些差错调试工具进行精细的调整。

通过修改 FIU 的源码可以对隶属函数编辑。但是可以更方便地用图形方式来调整隶属函数。MF-Edit 用图形方式来定义隶属函数的形状,并且把结果存储在文件中。隶属函数的形状可以修改,但修改以后要存储在文件中,再重新编译 FIL 源码。

利用分析器(Analyzer)可以显示由 FIU 生成的三维响应曲面。对大于三维的系统,可以选择两个输入值和一个输出值生成相应的曲面,而把其它的输入值取某一固定值。这种控制曲面图形对 FIU 的行为可视化是十分有用的。曲面上的异常情况可以变得很明显突出,据此就可以通过调试查错而把错误定位。利用跟踪器(Tracer)可以对建立在控制曲面上特定输出的源码进行访问,即可用跟踪器来跟踪对实际 IF/THEN 规则指定的行为。例如,一个在分析器的三维曲面上有特别的异常情况,可以通过把鼠标器光标指在曲面的相应点上,就可以跟踪到相应的源码。跟踪器还提供详细地察看推理过程的每一步,并可以随着执行从输出直接返回源码中的规则库。

利用模拟器可以显示输入和输出值的时间阶跃函数。模拟是由一系列用户在另外的文件中指定的输入值来驱动的。如果结果响应函数表明有不满意的系统行为(例如有超调现象),产生这行为的规则和隶属函数可以直接用跟踪器来定位。

所有的调试查错应用程序可以容易地辨识需要修改的规则和隶属函数,规则修改是用 FIL 编译器完成的。隶属函数修改可以用 FIL 编辑器,也可以用图形形式的 MF-Edit 完成。当作出改变以后,FIU 可以重新编译,而且调试过程必须重新开始。

在用调试工具检验了设计以后,下一步就可生成实时代码。

3. 目标代码生成

利用 FIDE 的主菜单上的 RTC(Real Time Code)功能,就可生成各种 Motorola 单片机 FIU 版本的汇编代码。它支持 M6805, M68HC05 和 M68HC11 芯片。然后再把生成的汇编源代码嵌入到用户应用程序代码中去。

4. 系统合成

FIU 在系统中经常仅是个部件,某些系统可能有多个 FIU,还可能存在非模糊单元。

用户可以编写描述其他系统特性的非模糊子程序。但这些非模糊子程序必须是用 C 语言编写的。如果有其他系统单元要被建立,用户应该提供 C 语言编译器。

为了把各种软件模块,包括在系统上开发的模糊推理模块或者事先已有的 C 语言代码,汇集成一个完整的系统,FIDE 可提供“合成器”,用户可用该工具通过数据流图或者文本形式组成所需要的系统。设计完成以后,FIDE 用 Aptronix 所构造的数据语言生成系统描述,再把这种描述送入代码发生器为各种单片机生成可执行代码。

合成器(Composer)是一个用于连接 FIDE 执行单元 FEU(Fide Execute Unit)、模糊推理单元 FIU(Fuzzy Inference Unit)和 FIDE 运算单元 FOU(Fuzzy Operation Unit)文本和图形的编辑器。它可以把 FEU, FIU 和 FOU 连接成一个模糊系统整体。它还可以用

图形方式表示整个系统的数据流。

FIDE 刚推出时只能生成 68HC05 和 68HC11 单片机代码,接着 Motorola 又宣布了 FidePlus,这是 FIDE 的扩展版,可生成 16 位的 68HC16 和 32 位的 68300 系列芯片的汇编代码。用户所要做的就是菜单上选择所需要的芯片,就能自动生成压缩和优化运行的编码。FIDE 是一个开放系统,Aptronix 公司正在公布其构造的数据表示格式,以便其它公司可开发兼容工具和另外的代码生成器。

为了帮助那些不熟悉模糊逻辑的新用户,Motorola 还可提供三个版本的教学套件。

1993 年 9 月 Aptronix 又为 Motorola 新开发的 68 系列单片机的 68HC08 更新模糊推理开发环境 FIDE,推出新版本 M68FIDE8,该版本允许用户从头到尾都用图形方式来设计模糊系统。

6.5.3 Fuzzy TECH

Fuzzy TECH 是德国亚琛工业大学(Aachen Institute for Technology)的 Zimmremann 教授领导的一个科研组研制成功的,1990 年研究完成并由德国 InFORM 公司生产,成为欧洲最成功的模糊系统开发工具,并先后传到日本,美国等国家。

应用 Fuzzy TECH 进行模糊系统的设计主要可分为四个步骤。

1. 系统定义

系统定义指模糊语言变量的定义、系统结构设计和模糊逻辑规则库的形式化处理系统定义,是模糊系统设计的基本步骤。

(1) 语言变量定义

定义一个语言变量可以通过键盘或鼠标器打开 LV 表及其下拉菜单,通过人机交互方式选择提示项来实现。Fuzzy TECH 提供了语言变量编辑器来定义语言变量。

(2) 基本变量名和论域定义

软件系统提供了一个基本变量对话框,用户用它来定义论域范围和基本变量的名称,基本变量的名字在系统中仅作显示用。另外,基本变量对话框还显示数据类型和所选择的模糊化方法。对于基本变量的取值范围有外观表示法和编码法两种表示方法。在系统开发过程中,所有的编辑和调试工具均采用外观表示法来显示基本变量,而在生成编码时,基本变量采用编码表示。

(3) 模糊变量的值(项)定义和隶属函数定义

从模糊变量编辑的下拉菜单可进入项定义对话框。在项对话框,用户可以定义项的名称,确定项的模糊隶属函数的类型。在 Fuzzy TECH 的 Explorer 版本中,仅提供标准类型中的 L-型(线性型)的模糊隶属函数供选用。在显示多个模糊隶属函数时,为了获得良好的视觉效果,对各个隶属函数提供了不同的颜色功能供选用。

用语言变量编辑器可定义模糊隶属函数,通过定义线性函数端点的方法来定义标准隶属函数。这里最多有四个定义点。

(4) 结构设计

在语言变量及其取值定义之后,系统将完成模糊逻辑基的结构设计。在项目编辑窗内,采用了注解(Remarks)、接口(Interface)和规则块(Rule Blocks)三个目标类型,可图

形化地显示系统结构。项目编辑窗可以显示语言变量之间的信息流。

在项目编辑窗的下拉菜单中,可激活接口选择对话框。在这里可选择模糊化和解模糊的方式。解模糊化方法有平均最大隶属度法、重心法等。项目编辑窗还可激活规则——输入——输出对话框,从语言变量中可选择要定义的规则中使用的变量。另外在规则——输入——输出对话框中还可选择模糊推理方法。可灵活地选择模糊算子定义不同的推理方法。

(5) 模糊规则的形式化

fuzzy TECH 提供了扩展表规则和模糊规则矩阵两种模糊规则编辑器,两者均可以在项目编辑窗内通过下拉菜单被激活。规则块可以用矩阵形式显示和编辑。矩阵显示两个语言变量之间的关系。一个模糊规则可以在矩阵中以一个矩阵元素来对应表示。

规则中语言变量的取值(项)可以在规则的条件表和结论表中选取。在矩阵中,一个白色的元素表示一个完全存在的模糊规则,一个黑色的元素表示一个完全不存在的模糊规则,而具有灰度等级的矩阵元素表示一个具有一定支持程度等级的模糊规则,用户可以方便地在模糊规则矩阵图中定义或删除一个规则。一个模糊规则支持等级的设立,可在矩阵规则编辑窗内以人机交互方式实现。

在模糊规则编辑窗内,能设立模糊推理方式。模糊推理主要由两个计算步骤来实现,首先是计算规则条件部分的若干子条件的隶属函数的综合,其次是整个条件支持程度和规则支持程度等级的复合。在规则编辑窗内,可确定不同的综合操作因子和复合操作因子,还能显示规则中模糊语言变量之间关系的三维图形。

2. 离线优化

通过实际数据或过程模拟对系统进行离线的分析和优化,经过比较精细的调整达到期望的性能。为了对系统性能进行分析,Fuzzy TECH 提供了几种不同的分析工具:

变换平台:分析静态输入/输出特性;

跟踪转换平台:分析动态的输入/输出特性;

时间平台:分析时间响应特性。

上述所有分析方法可在任一调试模型中被采用。系统允许用户同时打开若干个分析器,转换平台和跟踪平台可以手动地、独立地选择。

3. 在线优化

虽然所设计的系统在过程数据或离线模拟情况下都正常地工作,但对于大多数控制应用来说,由于种种原因,模糊控制器的实际工作环境是不同的。即使在使用实际数据时,还没有考虑闭环的情况,在采用模拟调试时,模型模拟一般总是近似的或简化了的,不能完全符合实际的被控过程。因此一个离线优化了的模糊控制器,在线实时控制不一定是最优的。在线优化仍然具有很大的意义。

在线优化要把目标系统的代码装入运行的硬件环境,在线实时运行后,用分析器检查分析,优化模糊控制器的参数,并重新编译。直至达到满意的控制指标。

4. 系统实现

系统实现最主要地是生成目标系统的代码。Fuzzy TECH 主要可生产两种目标代码。一种是 C 代码,一种是汇编代码。Fuzzy TECH 汇编代码生成器支持 Intel MCS-51、

MCS-96 单片机以及西门子的 80C166、Fuzzy-166 微处理器。

一个经过离线优化的模糊逻辑控制软件,要根据目标系统的具体硬件平台选择目标代码生成器生成目标代码并装入目标系统。如果是已经有条件进行了在线优化的,目标代码已经生成。目标代码一般应固化在目标系统。

6.5.4 NeuFuz4 和 NeuFuz4-C

NeuFuz4 是美国国家半导体(NS)公司研制的基于神经网络的模糊逻辑开发软件包。它的最大特点是把神经网络和模糊逻辑这两项新技术结合起来,用神经网络所具有的自学习和自组织功能来定义、提取并快速生成模糊规则和隶属函数,然后模糊逻辑用所产生的变量、规则和可变的隶属函数去解决实际的控制问题。该软件采用了专用的解模糊判决、规则推理和前件处理算法,并且用了改进的神经网络反向传递(BP)算法。该软件在 PC 机上 MS-Windows 环境下运行,可以生成该公司所生产的单片机的汇编代码,包括 4 位的 COP4、8 位的 COP8 和 16 位的 HPC 或 HPC+ 单片机。

NeuFuz4 的功能框图如图 6.33 所示。

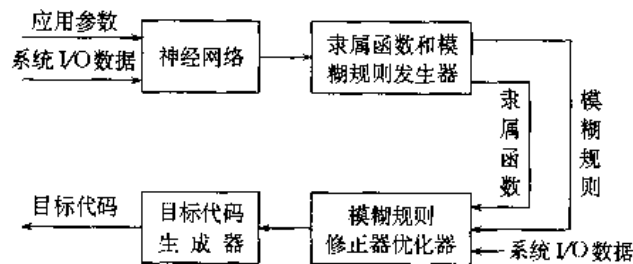


图 6.33 NeuFuz4 功能框图

从结构上看,前端神经网络只需要三层就可实现,每一层描述模糊逻辑方法的一个关键部分。神经元的第一层实现模糊化,第二层建立规则库,第三层是单独的神经元,作规则计算和解模糊判决用。

对神经网络的训练包括加入输入和所要求的输出,通过调节神经元之间联结的权重在不同层次上实现,一直到完成一系列的输入和获得正确的输出。因为那些在第一层的神经元,几乎可以任意设置,那么输入变量就不受限制,在第二层建立的规则数也是可以扩展的。

NeuFuz 是一种在 Windows 图形方式下工作的软件包。允许有四个输入和一个输出,有对所生成模糊控制规则和隶属函数进行优化的能力。它生成的单片机的核心程序只有 970 个字节,其中有 571 个字节是执行程序,四个输入的模糊隶属函数表占 252(4×7×9)个字节,49 条模糊控制规则需要 147 个字节。运行时,需要 50 个字节的 RAM 单元。

其它开发系统一般用四个点或者四个点以及两个斜率来表示隶属函数,而 NeuFuz 则是用六个点和三个斜率(共九个字节)来表示一个隶属函数,这样的隶属函数更接近于正态分布。每个输入变量有七个语言值。

对每一个输入变量进行输入模糊化,计算相应的隶属度,把结果存放在 RAM 中。它最多允许有 49 条规则,存放在 ROM 中。它用第一个字节表示两个输入量的隶属函数,即为规则的两个前件,每一个前件用 4 位二进制数来表示;第二字节是后两个输入量的隶属

函数,即是第三和第四个前件,如果只有两个输入量,后一个字节就可省去。用第三和第四个字节表示规则的输出结论,其中1位是符号位,15位是输出数值。模糊控制规则推理程序根据规则所给出的各个前件的输入隶属函数,计算出在此前件下相应的隶属度,再取前件中的最小值作为输出控制的隶属函数。为了实际控制的需要,再对输出隶属函数用重心法进行解模糊处理,得到一个确切的输出值。

模糊控制的重大难题是如何确定隶属函数和模糊控制规则。NeuFuz利用神经网络技术通过自学习来解决这个问题,开辟了一条模糊控制的新途径。神经网络由若干的神经元组成,每个神经元有若干个输入,每个输入都加有一个权值,其中一部分神经元的输出是另一部分神经元的输入,并组成多层网络。由于通过在不同神经元上加有不同的权值后的组合可构成原则上是无穷多种状态,所以有非常好的处理非线性数据的功能,经过训练便有记忆和自学习功能。在训练学习期间,神经网络通过不断调整各个神经元的权值,直到该神经网络对任何输入值都能够得到相应要求的输出值时为止。其训练学习的过程如下:

(1) 输入供神经网络训练用的数据

输入的数据分成三列:第一列和第二列为两个输入变量的数据,第三列为输出数据,这些数据都是精确的数字量。

(2) 神经网络进行自学习

读入输入的数据后,神经网络通过不断调整每一个神经元相互连接的权值,来使所产生的输出值尽可能地符合实际要求,经过多次读入和多次调整,使输出的值达到所允许的误差范围之内。

(3) 验证和简化神经网络自学习得到的模糊规则和隶属函数

在神经网络自学习后,当所产生的输出在允许误差范围内时,神经网络会产生相应输入隶属函数的曲线,通过编辑功能用点和线来逼近这个曲线,并使输入的每一个所取的语言值的隶属函数都可以用六个点三个斜率来表示。

在确定了隶属函数和模糊控制规则后,就可进行模拟运行,并对系统性能进行测试。系统可以模拟带有噪声或冲击干扰的输入,并通过测试比较来验证隶属函数和模糊控制规则的正确性。

(4) 生成COP8单片机的汇编语言的机器码

如果确认了以上所生成的隶属函数和模糊控制规则,就可由代码生成器产生一个记录文件,在这个文件中包含了COP8单片机模糊控制核心程序所需要的信息、输入变量及其范围、输出变量及其范围、权因子以及所用ROM和RAM的大小。最后还要把生成的COP8单片机模糊控制核心代码程序用连接程序与用户的应用程序进行连接,合成单片机能真正运行的完整的模糊控制应用程序。

美国国家半导体公司在1994年10月又推出新的开发软件包NeuFuz4-C。它可以对任何可用标准ANSI-C语言编译器的单片机开发神经-模糊嵌入式应用。它可望用于各种复杂的控制和模式识别问题,例如用于汽车的防滑刹车、自动换档、各种过程控制领域项目以及消费电子产品。这项技术已成功地用于镍镉和镍氢电池快速充电器的开发。

这个软件包可以解决最多四个输入和一个输出模糊逻辑系统从开发、测试和实现的所有问题。该软件通过MS-Windows界面,用系统的输入和输出数据和神经网络软件自

动地学习系统行为,然后生成基于系统知识的隶属函数和模糊规则库。一旦隶属函数和模糊规则库建立,该软件包还提供优化手段来减少规则数和隶属函数,以进一步实现对系统的精细调整。

6.6 模糊控制系统应用实例

6.6.1 世界上第一例模糊控制系统——蒸汽发动机的模糊控制

出生于印度的伦敦大学玛丽皇后学院教授 E. H. Mamdani 是一个博士生导师。1973 年他的学生 S. Assilian 试图对实验室的带有小锅炉的蒸汽发动机进行控制,控制目标是保持锅炉压力和蒸汽发动机活塞速度恒定。S. Assilian 也希望系统有学习的功能,计算机不断地采集压力、速度等数据,用这些信息支持系统进行学习。但事情并不随人愿,开始效果不好。他去请教他的老师。Mamdani 苦思冥想,突然想到 L. A. Zadeh 的模糊集的论文,于是他决定去试一试,竟然比较容易地获得了成功。

“这实际上是个转折点”,Zadeh 后来说。Mamdani 的小蒸汽机的模糊控制系统成为今天世界上模糊控制系统的鼻祖,意义非常重大。

下面我们介绍一下 Mamdani 蒸汽发动机的模糊控制系统。

1. 系统概况

蒸汽发动机主要有两个部分:锅炉和发动机。控制目标是锅炉压力和发动机的速度恒定,通过调节加热来控制锅炉的压力,热量增加则压力增大。蒸汽发动机的速度则通过调节节流阀进行控制,开大阀门则速度增大。图 6.34 为控制系统的结构图。

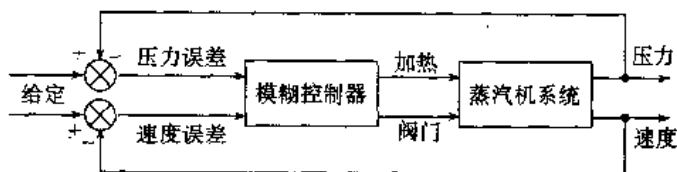


图 6.34 蒸汽机和锅炉的模糊控制系统

不难看出,这是一个两输入两输出控制系统。操作变量分别为锅炉的供给热量和蒸汽机阀门的开度。这个过程存在着非线性、噪声以及两个控制回路间的耦合。

2. 模糊控制器的结构

模糊控制器采用如下六个模糊变量:

PE (Pressure Error)——压力误差

SE (Speed Error)——速度误差

CPE (Change in Pressure Error)——压力误差的变化

CSE (Change in Speed Error)——速度误差的变化

HC (Heat Change)——热量变化

TC (Throttle Change)——阀门变化

其中 PE , SE , CPE 及 CSE 为输入模糊变量,而 HC 及 TC 为输出模糊变量。

模糊控制器采用 PDP-11 计算机,由 Fortran 语言实现控制算法,采样间隔为 10s。模糊控制器采取独立控制压力和速度的方式。因此,对于控制压力而言,其输入变量为压力误差及压力误差的变化,而对速度控制而言,其输入变量为速度误差及速度误差的变化。

3. 模糊变量的论域及其隶属函数

把误差(PE, SE)论域量化为 14 档,即

$$\{-6, -5, \dots, -1, -0, +0, +1, +2, \dots, +6\}$$

误差变量的模糊子集选取如下辞集:

$$\{PB, PM, PS, PO, NO, NS, NM, NB\}$$

误差模糊变量的隶属度赋值如表 6.8 所示

表 6.8

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.3	0.8	1.0	0.5	0.1	0	0
PO	0	0	0	0	0	0	0	1.0	0.6	0.1	0	0	0	0
NO	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	0	0	0	0	0	0	0
NS	0	0	0.1	0.5	1.0	0.8	0.3	0	0	0	0	0	0	0
NM	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

误差模糊变量的隶属度赋值是根据表 6.9 中给出的模糊变量隶属函数相应的表达式确定的。

将误差变化(CPE, CSE)分成 13 档,即:

$$\{-6, -5, \dots, -1, 0, +1, +2, \dots, +6\}$$

误差变化的模糊子集是取如下辞集:

$$\{PB, PM, PS, O, NS, NM, NB\}$$

误差变化的模糊变量赋值如表 6.10 所示

热量变化(HC)的论域量化成 15 档,即:

$$\{-7, -6, \dots, -1, 0, +1, +2, \dots, +7\}$$

热量变化的模糊子集同误差变化的模糊子集选择相同,而模糊子集的隶属度赋值如表 6.11 所示。

阀门变化(TC)的论域量化成 5 档,即:

$$\{-2, -1, 0, +1, +2\}$$

阀门变化的模糊子集选取的辞集为:

$$\{PB, PS, O, NS, NB\}$$

表 6.9 模糊变量的隶属函数

模糊子集	表 达 式
PB	$1 - \exp[-(\frac{0.5}{ 1-x })^{2.5}]$
PM	$1 - \exp[-(\frac{0.25}{ 0.7-x })^{2.5}]$
PS	$1 - \exp[-(\frac{0.25}{ 0.4-x })^{2.5}]$
PO	$\exp[-5 x-0.05]$
NO	$\exp[-5 x+0.05]$
NS	$1 - \exp[-(\frac{0.25}{ -0.4-x })^{2.5}]$
NM	$1 - \exp[-(\frac{0.25}{ -0.7-x })^{2.5}]$
NB	$1 - \exp[-(\frac{0.25}{ -1-x })^{2.5}]$

表 6.10

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.9	1.0	0.7	0.2	0	0
O	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0
NS	0	0	0.2	0.7	1.0	0.9	0	0	0	0	0	0	0
NM	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 6.11

	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.4	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0.2	1.0	0.2	0	0	0	0	0	0
NS	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0	0.4	0	0	0	0	0	0	0
NM	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

阀门变化的模糊变量赋值由表 6.12 给出。

表 6.12

	-2	-1	0	+1	+2
<i>PB</i>	0	0	0	0.5	1.0
<i>PS</i>	0	0	0.5	1.0	0.5
<i>O</i>	0	0.5	1.0	0.5	0
<i>NS</i>	0.5	1.0	0.5	0	0
<i>NB</i>	1.0	0.5	0	0	0

4. 控制规则

两个反馈回路分别制定两套控制规则。分述如下：

(1) 压力控制规则

if $PE = NB$ then if $CPE = \text{not } (NB \text{ or } NM)$ then $HC = PB$

or

if $PE = (NB \text{ or } NM)$ then if $CPE = NS$ then $HC = PM$

or

if $PE = NS$ then if $CPE = (PS \text{ or } NO)$ then $HC = PM$

or

if $PE = NO$ then if $CPE = (PS \text{ or } PM)$ then $HC = PM$

or

if $PE = NO$ then if $CPE = (NB \text{ or } NM)$ then $HC = NM$

or

if $PE = (PO \text{ or } NO)$ then if $CPE = NO$ then $HC = NO$

or

if $PE = PO$ then if $CPE = (NB \text{ or } NM)$ then $HC = PM$

or

if $PE = PO$ then if $CPE = (PB \text{ or } PM)$ then $HC = NM$

or

if $PE = PS$ then if $CPE = (PS \text{ or } NO)$ then $HC = NM$

or

if $PE = (PB \text{ or } PM)$ then if $CPE = NS$ then $HC = NM$

or

if $PE = PB$ then if $CPE = \text{not } (NB \text{ or } NM)$ then $HC = NB$

or

if $PE = NO$ then if $CPE = PS$ then $HC = PS$

or
if $PE=NO$ then if $CPE=NS$ then $HC=NS$

or
if $PE=PO$ then if $CPE=NS$ then $HC=PS$

or
if $PE=PO$ then if $CPE=PS$ then $HC=NS$

or
(2) 速度控制规则:

if $SE=NB$ then if $CSE=\text{not } (NB \text{ or } NM)$ then $TC=PB$

or
if $SE=NM$ then if $CSE=(PB \text{ or } PM \text{ or } PS)$ then $TC=PS$

or
if $SE=NS$ then if $CSE=(PB \text{ or } PM)$ then $TC=PS$

or
if $SE=NO$ then if $CSE=PB$ then $TC=PS$

or
if $SE=(PO \text{ or } NO)$ then if $CSE=(PS \text{ or } NS \text{ or } NO)$ then $TC=NO$

or
if $SE=PO$ then if $CSE=PB$ then $TC=NS$

or
if $SE=PS$ then if $CSE=(PB \text{ or } PM)$ then $TC=NS$

or
if $SE=PM$ then if $CSE=(PB \text{ or } PM \text{ or } PS)$ then $TC=NS$

or
if $SE=PB$ then if $CSE=\text{not } (NB \text{ or } NM)$ then $TC=NB$

Mamdani 比较了锅炉出口压力的模糊控制结果与 DDC 控制的结果,两种控制系统都是调整到最佳状态。当工作条件大范围变化时,实验表明传统的控制系统难以调整,而且由于动力过程的改变,传统的 DDC 控制方式无法在同一组参数下得到满意的控制特性。与此相反,模糊控制系统由于对过程参数的变化不灵敏,所以它在几乎所有的工作点都能收到很好的控制效果。由于蒸汽机具有非线性,它的特性随时间而变化,因而 DDC 控制应该经常进行参数的再调整,而模糊控制器却没有这种必要,原因是模糊控制器具有较强的适应能力。

6.6.2 日本仙台市地铁机车模糊控制

日本日立公司为仙台市研制的模糊控制地铁电力机车自动运输系统,自 1983 年开始试验和测试,历经四年,于 1987 年 7 月 15 日正式投入运行。这是迄今在世界上最先进的

地铁系统,这也是模糊逻辑应用于控制领域的一座里程碑,是模糊控制一个光彩夺目的范例。乘这种车会感到非常平稳舒适。火车还可以很高的精确性停在站台位置上,经过系统运行一万次以上的试验行驶、进站停车统计,停车误差在 30cm 以上的还不到 1%,标准差是 10.6cm。与传统的 PID 控制相比,它比传统 PID 控制系统节省 10% 的燃料;停靠站台的准确,模糊控制的停车误差标准是 PID 控制的三分之一;与乘客舒适度感觉直接有关的控制值变化次数,同样模糊控制只有 PID 控制的三分之一。

机车司机通常要考虑如下一些评价控制性能的项目:安全性、行驶时间、平稳性(即乘客的舒适性)、停站准确度、行驶速度和电力消耗等。对其控制技术的考核评价指标也是根据这几项进行的。

传统的自动驾驶的机车控制系统是根据事先制定好的距离—速度曲线,利用 PID 控制算法在限定速度以下来跟踪曲线运行。实际机车速度与期望速度总存在误差,为了减少误差的平均值,往往要使加速或减速的次数增多,而使乘客感到不舒服。另外这种控制器也难以考虑节省电力能源的问题,如要兼顾安全性和准确停靠站台就更难。为了能逼近预定目标,常常还是要有有经验的司机不断干预调整。要做到满足以上多目的控制的评价标准,实际上需要熟练的司机不断根据要求和机车运动的特性,利用积累的经验作出某种预测,能随时预测目前情况下应该如何改变控制,使机车继续运行一段路程后便能达到预期目标。例如,要根据预知的停车位置估算出可能的机车位置、速度和减速度等。在停靠站台前的一段时间,可能会用如下一些经验规则:

如果保持目前的刹车状态可以顺利停靠,那么就保持目前的刹车状态;

如果再增加一点刹车力矩可以更平衡地顺利停靠,那么就再稍微增加一点刹车力矩。

能否把这些熟练司机的经验总结成控制规则呢?这就是日立公司开发地铁电力机车自动运输系统模糊控制器的出发点。模糊控制器的控制推理规则就是根据熟练司机的经验法则总结,再经计算机进行模拟后得到的。

根据机车运行控制的具体特点,采用了预测型的模糊推理。预测型的模糊控制规则与一般的模糊条件语句形式有所不同,它的形式如:

IF 控制作用为 $C_i \rightarrow$ 系统状态 1 为 A_i 且系统状态 2 为 B_i THEN 控制作用为 C_i 。

预测型模糊控制规则亦称目标评价型模糊控制规则。

下面简单介绍一下仙台市地铁机车模糊控制的情况。更详细的介绍可参看资料[20]。

1. 评价指标的定义

对机车运行控制的性能定义 6 个评价指标,它们为 6 个模糊语言变量:

A: (Accuracy of stop gap) 停车准确度

C: (Comfort of riding) 乘坐舒适性

E: (Energy saving) 节约能源

R: (Running time) 行驶时间

S: (Safety) 安全性

T: (Traceability of speed) 速度跟踪性

它们的语言值为 5 个模糊子集:

VG: (Very Good) 非常好

G : (Good)好

M : (Medium)中等

B : (Bad)差

VB : (Very Bad)非常差

如果要表示停车准确度非常好,在规则中就可使用 $A=VG$ 表示。

各个评价指标的语言值模糊子集的隶属函数采用如下的定义方法:

(1) 停车准确度。停车准确度用停车目标位置与预测停车位置的相对距离 N_s 来描述,用 N_s 定义停车准确度的模糊子集的隶属函数。

(2) 乘坐舒适性。如何对乘坐舒适性来进行评价呢?当速度控制阀频繁切换时,就会产生较高频率的振动而引起乘客感到不舒服。所以这里是用行驶中速度控制阀阈值变化的段数 N_c 的函数 $C(N_c)$ 和该控制阀在切换后所维持的时间 T_c 来描述的,它们反映了乘坐的舒适性好坏。

(3) 节约能源。要对节约能源进行定义,可采用这样的方法:在车站之间设定某个特定的地点 X_s ,如果从当前所在地点到 X_s 利用惯性来行驶,计算出可能要增加的时间,用这个可能要增加的时间与还剩余的时间作比较,来决定是否允许利用惯性行驶一段时间。利用惯性行驶可以节约能源。

(4) 行驶时间。从进站标志到停车位置一般只有几十 m,这段距离所花时间不会太长,而且大体相同,所以行驶时间可用出发时间至到达进站标志点的时间作为行驶时间。

(5) 安全性。安全性被定义为当前机车速度超过限定速度时,从该速度回到限定速度以下所需要的时间 t_s 。

(6) 速度跟踪性。速度跟踪性定义为预测速度与目标速度的一致性。

2. 对机车运动特性的模拟实验

实际上由于道路的变化和其它因素的影响,使得刹车阈值产生的减速度与系统预定的值会有大约 $\pm 30\%$ 的误差。为了更好地控制机车,就必须对相应的减速度进行推算。其方法是司机在机车上用一定的控制阈值行驶一段时间,例如 3s,用所行驶的数据就可计算出加速度或减速度。据此即可推得驱动和刹车系统的特性,对加、减速度进行修正,以便更准确地预测。

3. 模糊控制规则的制定

根据熟练司机的经验法则和模糊表述方法,制定出如下 24 条预见型模糊控制规则。在规则中:

N : 表示控制阈值;

NC : 表示相对于当前的控制阈值的变化量;

Pn : 表示行驶控制刻度盘上的刻度, $P7$ 表示最大控制值;

Bn : 表示刹车刻度盘上的刻度;

B_{max} : 表示紧急刹车;

$N(t)$ 是当前的控制值。

(1) 站间定速行驶控制规则

富有经验的司机提供了如下操作经验的语言描述。

规律 1: 为了确保安全性和乘坐的舒适, 当速度高于所限速度时, 把控制值调到当前控制值与紧急刹车控制值之间的中间值, 这样, 如果需要紧急刹车, 冲击就会减小。

规律 2: 为了节约能源, 当可以确保行驶时间时, 就利用惯性运行, 这时既不加速也不刹车。

规律 3: 为了缩短行驶时间, 当速度小于所限速度时, 则可用最大加速。

规律 4: 为了乘坐舒适, 如果用当前控制值就可保持车速跟踪目标速度, 那么就可保持当前控制值。

规律 5: 为了跟踪行驶速度, 如果在当前控制下, 不能达到目标值, 就应该在 $\pm n$ 个控制值范围内选择适当的控制值来调节车速, 以达到目标值。同时还要考虑到乘坐舒适, 避免加速过大。

根据这些控制规律, 就可制定出如下满足模糊控制要求的控制规则:

- 规则 1: 如果 $N=0$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $E=G$, 那么 $N=0$;
规则 2: 如果 $N=P7$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=B$, 那么 $N=P7$;
规则 3: 如果 $N=B7$ 时 $S=B$, 那么 $N=(N(t)+B_{\max})/2$;
规则 4: 如果 $NC=4$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=4$;
规则 5: 如果 $NC=3$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=3$;
规则 6: 如果 $NC=2$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=2$;
规则 7: 如果 $NC=1$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=1$;
规则 8: 如果 $NC=0$ 时 $S=G$ 且 $T=G$, 那么 $NC=0$;
规则 9: 如果 $NC=-1$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=-1$;
规则 10: 如果 $NC=-2$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=-2$;
规则 11: 如果 $NC=-3$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=-3$;
规则 12: 如果 $NC=-4$ 时 $S=G$ 且 $C=G$ 且 $T=VG$, 那么 $NC=-4$;

(2) 车站停车控制规则

操作经验的语言描述为: 当列车通过车站前放置的停车标志后, 指示可以开始控制停车定位, 但同时要考虑乘坐舒适性, 具体根据以下要求来选择控制值。

规律 1: 为了乘坐舒适性, 在通过标志时, 应该保持当前的控制值, 以避免惯性冲击;

规律 2: 为了缩短行驶时间, 同时考虑乘坐舒适性, 在标志前不要刹车, 过了标志开始缓慢刹车;

规律 3: 为了精确定位, 在过了标志后, 就应该在 $\pm n$ 个控制值范围内选择适当的控制值来调节车速, 以便正确停车, 同时要避免发生惯性冲击。

根据这些控制规律, 就可制定出如下满足模糊控制要求的控制规则:

- 规则 1: 如果 $NC=+3$ 时 $R=VG$ 且 $C=G$ 且 $A=VG$, 那么 $NC=3$;
规则 2: 如果 $NC=+2$ 时 $R=VG$ 且 $C=G$ 且 $A=VG$, 那么 $NC=2$;
规则 3: 如果 $NC=+1$ 时 $R=VG$ 且 $C=G$ 且 $A=VG$, 那么 $NC=1$;
规则 4: 如果 $NC=0$ 时 $R=VG$ 且 $A=G$, 那么 $NC=0$;
规则 5: 如果 $NC=-1$ 时 $R=VG$ 且 $C=G$ 且 $A=VG$, 那么 $NC=-1$;

规则 6: 如果 $NC = -2$ 时 $R = VG$ 且 $C = G$ 且 $A = VG$, 那么 $NC = -2$;
 规则 7: 如果 $NC = -3$ 时 $R = VG$ 且 $C = G$ 且 $A = VG$, 那么 $NC = -3$;
 规则 8: 如果 $N = P7$ 时 $R = VB$ 且 $C = G$ 且 $S = G$, 那么 $N = P7$;
 规则 9: 如果 $N = P4$ 时 $R = B$ 且 $A = B$ 且 $S = G$, 那么 $N = P4$;
 规则 10: 如果 $N = 0$ 时 $R = M$ 且 $C = G$ 且 $S = G$, 那么 $N = 0$;
 规则 11: 如果 $N = B1$ 时 $R = G$ 且 $C = G$ 且 $S = G$, 那么 $N = B1$;
 规则 12: 如果 $N = B7$ 时 且 $S = VB$, 那么 $N = 0$ 。

6.6.3 全自动洗衣机的模糊控制

自 1989 年起,日本首先开发了采用模糊控制的家用电器产品,包括全自动洗衣机,电冰箱,空调机,吸尘器,微波炉,电饭锅,摄象机,电风扇等等,几乎无处不在。这些智能家电不但减轻了人们日常生活的操劳,而且还节约了家庭主妇们水电方面的开销。因此“Fuzzy”一词在日本已是家喻户晓,妇孺皆知,带有“Fuzzy”标法的产品,占领市场之广泛,更新换代之快,令人刮目相看。现在这股模糊热已经蔓延到西方和东南亚一些国家。表 6.13 给出了日本几种家用电器模糊控制技术的应用和发展情况。

表 6.13 模糊控制在家电中的普及率

普及率(%) 品种 \ 时间	1990 年	1992 年	1994 年	趋 势
空调机	10	40	55	中档机以上
微波炉	30	40	45	中档机以上
洗衣机	40	60	80	全自动洗衣机
电冰箱	0	10	20	高档机
石油取暖器	10	30	40	高档机
电饭煲	35	50	55	中档机以上
吸尘器	40	70	80	中档机以上
电风扇	0	10	30	一部分高档机

开发最早的模糊家电产品是洗衣机。洗衣机一般要根据洗衣量的多少、衣物的污垢程度,衣物的质料性质,水温的高低等来决定洗涤的时间、水流的强弱、洗涤剂的用量等。一个有经验的家庭主妇能够把衣物洗得干干净净又不损坏衣料而且又节约水、电。这并不是任何人都能做到的。因此设计一个“one touch”的洗衣机,它根据具体的洗涤情况去合理地调节洗涤水流、洗涤时间等,把你的衣服洗得干净清爽是人们向往的。日本松下、日立、三洋、东芝、夏普等电气公司竞相占领这个市场,先后推出了多种智能的模糊洗衣机。

1. 模糊洗衣机的结构

不同型号的模糊洗衣机结构不完全相同,大体如图 6.35 所示,除了一般全自动洗衣机具有的洗涤缸、马达、波盘、给水和排水电磁阀、控制器、水位传感器等之外,一般根据模

糊控制需要还要加上光传感器,负载检测电路、水温传感器等。

(1) 负载检测(衣物量检测)

负载检测即检测所洗衣物的重量,一般采用间接的测量方法。可用电动机正常运转时的驱动电流来计量。还有一种常常采用的办法是用电动机断电后反电动势维持的时间来计量。

以计量断电后马达反电动势持续时间为例,把马达反电动势取样后经 A/D 转换送微处理器进行数据处理。具体方法是:当衣服投入缸中后,加入适量的水,启动电动机旋转若干圈后断电,测量电动机线圈两端的反电动势,经 A/D 转换器变换成数字量后送微处理器或者单片机处理判断,以决定衣物的重量。一般而言,衣物重,负载大,其反电动势跌落也快,即惯性转动的时间也短;反之则反电动势跌落慢。也可以取断电后反映马达转动的脉冲信号来计量反电动势持续的时间长短。

(2) 质料检测

被洗衣物的质料可分为软质类、硬质类、和混合类等几种,一般把丝绸、化纤、薄型花布等称为软质类,而牛仔衣裤、呢绒服装等称为硬质类,介于它们之间的则为混合类。

衣物质料检测也是间接检测方法。如果测量的是马达的驱动电流,那么硬质类布料电流波形变化大,有较大的波动,而软质类布料电流相对平稳,波动小。一般硬质类布料吸水慢。可以在注水后开动一定时间,可利用比较开动前后水位的变化来判别硬、软质布料。因为硬质类布料吸水慢,因此开动前后水位变化大;反之,软质料水位变化小。还有其它的方法间接地检测衣物质料。

(3) 污浊度检测

被洗衣物的污浊度检测是通过水的透光率检测间接地实现的。

水的透光率是用光电传感器实现的。它被安排在排水管出口,发光二极管和光敏管分别相对安装在管子的两边。发光二极管发出的光经聚焦后,透过水被光敏管接收,接收的强度就反映了水的透明度,也就是水的污浊的程度。这是一种间接测量衣物污垢的方法,因为衣物脏的程度与洗涤水的污浊度有相关的关系。它的输出变化曲线如图 6.36 和图 6.37。

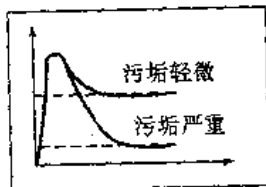


图 6.36 轻、重污垢透光率变化

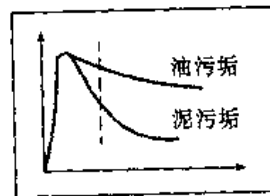


图 6.37 油、泥污垢透光率变化

从图 6.36 和图 6.37 中可知,开始注入清水,透明度很高,随着污垢析出,水逐渐变

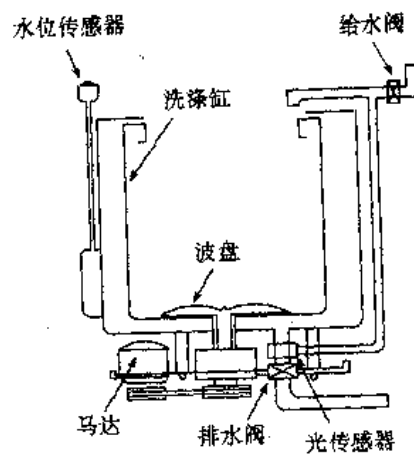


图 6.35 模糊洗衣机的结构图

浊,透明度下降,最后就有一个饱和稳定值。根据透光率的变化形态和过程,可以知道污垢的性质和程度。对于泥污类的污垢,一般分离得快,较早进入水中,故其透光率进入饱和状态的时间较短;而油污类污垢相对分离得较慢,因此透光率的变化速率小,达到饱和值的时间也较长。

(4) 水位检测

水位检测是用一种专用水位传感器实现的。这种水位传感器是一根与缸体等高的空管,它与缸体构成一个连通器,空管的上端有一个用压力膜隔开的差动电感器,当缸中有水注入时,管内的空气被压缩使压力膜上压力增大,继而推动与它联动的铁芯移动,引起线圈的电感量变化。用此电感器构成的 LC 振荡器的频率就能反映水位的高低。用这个传感器既可用于配合以上布料软硬度的检测,同时也作为水位控制依据的检测装置。

(5) 水温检测

水温检测是通过热敏电阻测量的。它把洗衣机启动时的温度作为当时的室温,然后再检测供水的温度,以作为洗衣条件之一。

2. 洗衣机的模糊控制

不同型号的洗衣机模糊控制的方案不完全相同,选择的模糊控制规则不同。现举一例说明。

(1) 模糊语言变量及辞集

① 输入变量(分三级)

负载:大、中等、小

质料:棉制品偏多、棉和化纤制品各半、化纤制品偏

多

水温:偏高、中等、偏低

② 输出变量(分四级)

水流强度:很强、强、中、弱

洗涤时间:很长、长、中、短

(2) 隶属函数定义

输入变量和输出变量的模糊子集均采用简单的三角形隶属函数。图 6.38 是被洗衣物量的模糊子集的隶属函数,其它类似,不再给出。

(3) 模糊控制规则

根据输入变量和输出变量的分级组合,对于水流强度和洗涤时间就可用以下的 27(=3×3×3)条模糊规则表示。

规则 1:如果负载小,质料化纤制品偏多,且水温偏高,那么就将水流调弱,洗涤时间调短。

规则 2:如果负载大,质料棉制品偏多,且水温偏低,那么就将水流调强,洗涤时间调长。

.....

以此类推,可写出其他规则,下面的表 6.14 是输出变量与输入变量之间关系的模糊真值表。

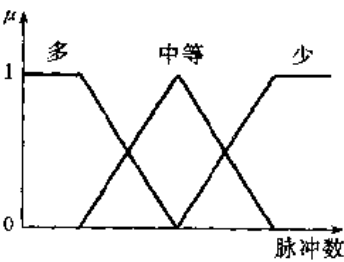


图 6.38 洗衣量(负载)的模糊子集

表 6.14 模糊控制规则表

负载	输出	质料	棉制品偏多			棉和化各半			化纤制品偏多		
		水温	偏低	中等	偏高	偏低	中等	偏高	偏低	中等	偏高
偏大	水流		特强	强	强	强	强	中	中	中	中
	时间		特长	长	长	长	长	中	长	中	中
中等	水流		中	中	中	中	中	中	中	弱	弱
	时间		长	中	短	长	中	中	中	中	短
偏小	水流		弱	弱	弱	弱	弱	弱	弱	弱	特弱
	时间		中	中	短	中	短	短	中	短	特短

有了以上定义和规则就可设计洗衣机模糊控制在线运行的查询表。经过反复实验调整,最后对洗涤水流和洗涤时间确定了 264 种洗涤方式,又细分为:

- ① 水流:9 种
- ② 洗涤时间:16 种
- ③ 清洗时间:6 种
- ④ 脱水时间:6 种

模糊洗衣机的模糊控制器常常采用单片机,如三洋全自动模糊洗衣机 ASW-60V1 采用 4 位单片机,12K ROM 存储程序,512 字节 RAM 存储数据。

6.6.4 聚合反应釜生产过程模糊控制

本小节介绍生产农药乳化剂的半间歇式聚合釜反应过程釜温的模糊控制。聚合反应是一种带有正反馈性质的放热反应,控制目标应该是使化学反应稳定而且达到一定的反应速度以保证产品质量和产量,控制反应温度就能间接地反映这种目标。

乳化剂是由中间体 R 和环氧乙烷 EO 在一定温度下经催化剂作用发生聚合反应而生成。中间体 R 在反应前一次投料, EO 则是在反应过程中按给定曲线连续加入(滴加)。反应为放热反应。温度控制主要是通过调节冷却水流量带走反应热。

生成乳化剂的聚合反应期可分为两个阶段:诱导反应阶段和稳定反应阶段。反应初期诱导阶段的化学反应极为复杂,有时中止反应,有时产生“爆聚”,放热很不稳定,此时对象是一个不确定型过程,难以用数学模型描述。为此,我们综合人工控制的经验,采用模糊控制方案,下面我们介绍诱导反应阶段模糊控制方案的设计。

在诱导反应阶段温度控制的人工操作中,操作者除了观察釜温的偏差及变化率之外,还常常要考虑釜内压力情况,其理由是:环氧乙烷 EO 进入釜内后,因汽化将引起釜压变化,釜压的大小可定性代表釜内积存(未反应掉的) EO 的多少。釜压较高说明诱导反应不够充分,这时的反应情况很不稳定,容易出现反应突然变慢或中止,温度持续下降;更为严重的是,一旦反应重新开始,那些积存的 EO 大量参与反应,釜内发生“爆聚”,温度上升极

快;因此,在釜压较高时,一定要求控制作用非常灵敏、快速。另一方面,如釜压较低,则反应渐趋稳定,这时控制作用一般较为平缓。由此可见,釜压的变化反应了不同的过程状态,而在不同的过程状态下,应采取不同的控制规则。

就一般而言,多个输入量引入模糊控制器后,常可用其中一个量或几个量作为辅助输入量,由它的变化来代表不同的过程状态。在不同的过程状态下,可根据被控量及其变化率定出控制规则。

以下是模糊控制器的具体设计。

1. 确定各输入量和输出量的实际变化范围、论域离散点数以及量化因子与比例因子

控制器的输入量分别是压力 p 、温度误差 e 及其变化率 ec , 输出量为冷水阀门开度或其开度变化 u 。它们的变化范围可根据实际情况确定;论域离散点数的选取要适中;当各量的实际变化范围与论域离散点数确定后,量化因子与比例因子也随之而定。以温度误差为例:

温度误差的实际变化范围取作 $[-6, 8]$ 度, 即表示温度一般在 $[T_0 - 6, T_0 + 8]$ 度范围内变化, T_0 为温度设定值。取其论域为:

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

即离散点数为 8, 则量化因子可定为:

$$k = \frac{\text{离散点数} - 1}{\text{实际变化范围}} = \frac{8 - 1}{8 - (-6)} = 0.5$$

实际误差与离散点的对应关系为:

误差(度)	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
离散点	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

量化时采用就近原则。

关于温度误差变化率 ec 、压力 p 、控制量 u 的设计与 e 相同, 不再赘述。

2. 模糊子集的选取与模糊赋值

对于温度误差 e 及其变化率 ec , 在它们的论域上定义模糊子集: PB (正大)、 PS (正小)、 ZE (零)、 NS (负小)、 NB (负大), 并定义各模糊子集的隶属函数, 则有表 6.15 和表 6.16。

表 6.15 模糊变量 E 赋值表

隶属度 / 离散点		-3	-2	-1	0	1	2	3	4
模糊集									
PB		0	0	0	0	0	0.4	0.8	1.0
PS		0	0	0	0	0.5	1.0	0.7	0.2
ZE		0	0	0.5	0.9	0.9	0.5	0	0
NS		0.2	0.7	1.0	0.5	0	0	0	0
NB		1.0	0.8	0.4	0	0	0	0	0

表 6.16 模糊变量 EC 赋值表

隶属度 模糊集	离散点								
		-3	-2	-1	0	1	2	3	4
PB		0	0	0	0	0	0.4	0.8	1.0
PS		0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2
ZE		0	0.2	0.7	1	0.7	0.2	0	0
NS		0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0
NB		0.9	0.4	0	0	0	0	0	0

根据实际情况,将釜压分为高、中、低三挡,因此在论域 P 上定义模糊子集: HP 、 MP 、 LP 分别代表高压、中压、低压,则有表 6.17。

表 6.17 模糊变量 P 赋值表

隶属度 模糊集	离散点						
		0	1	2	3	4	5
HP		0	0	0	0.2	0.7	1.0
MP		0	0.5	0.9	0.9	0.5	0
LP		1.0	0.7	0.2	0	0	0

对于控制量,在其论域上选择模糊子集 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 。对绝对量型输出,它们分别表示阀门开度的全开、大开、适中、小开、全关;对增量型输出,它们分别表示阀门开度变化的大增、稍增、不变、稍减、大减。则有表 6.18。

表 6.18 模糊变量 U 赋值表

绝对量型 增量型											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
C_1	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
C_2	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0
C_3	0	0	0	0	0.5	1.0	0.5	0	0	0	0
C_4	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0
C_5	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0

3. 建立控制规则

控制规则结构见图 6.39。这是一个两级多规则集结构。

规则集 R_1, R_2, R_3 均由实践经验分析总结而得,如表 6.19, 6.20 和 6.21。

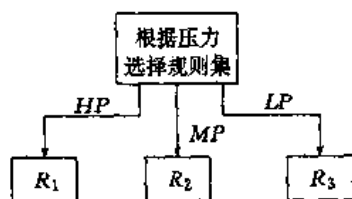


图 6.39 控制规则结构

表 6.19 规则集 R_1

$U \backslash EC$		PB	PS	ZE	NS	NB
E						
	PB	C_1	C_1	C_4	C_4	C_5
	PS	C_1	C_1	C_4	C_5	C_5
	ZE	C_1	C_2	C_5	C_5	C_5
	NS	C_1	C_3	C_5	C_5	C_5
	NB	C_2	C_3	C_5	C_5	C_5

表 6.20 规则集 R_2

$U \backslash EC$		PB	PS	ZE	NS	NB
E						
	PB	C_1	C_1	C_3	C_3	C_5
	PS	C_1	C_1	C_2	C_4	C_5
	ZE	C_1	C_2	C_4	C_5	C_5
	NS	C_1	C_3	C_5	C_5	C_5
	NB	C_2	C_3	C_5	C_5	C_5

表 6.21 规则集 R_3

$U \backslash EC$		PB	PS	ZE	NS	NB
E						
	PB	C_1	C_1	C_1	C_2	C_4
	PS	C_1	C_1	C_2	C_3	C_5
	ZE	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	NS	C_1	C_3	C_4	C_5	C_5
	NB	C_2	C_4	C_5	C_5	C_5

规则集 R_1 的特点是对温度变化趋势非常敏感(采用绝对量型输出)，规则集 R_3 适用于反应趋于平稳的情况(输出采用增量型)，规则集 R_2 介于规则集 R_1 和 R_3 之间。

4. 模糊控制查询表

模糊控制器的输入量有三个，即压力、温度误差及误差变化率。以规则集 R_1 左上角的控制规则为例，它的条件语句应写成为：

If $P = HP$ and $E = PB$ and $EC = PB$ Then $U = C_1$

它所对应的模糊关系为： $HP \times PB_B \times PB_{EC} \rightarrow C_1$ 。这是一个四维的模糊关系，记为 r_1 。

这样的模糊条件语句共有 $5 \times 5 \times 3 = 75$ 条，由此决定了 75 个模糊关系 r_1, r_2, \dots, r_{75} ，其总的模糊关系为： $r = \bigcup_{i=1}^{75} r_i$ 。

若有输入模糊量 p_0, e_0, ec_0 ，根据模糊关系 r 和模糊推理合成规则可求得输出模糊量 u_0 。由于当前测量到的釜压 p_0 ，温度误差 e_0 及算出的误差变化率 ec_0 都是确定的数值，首先使它们模糊化。我们采用单点模糊集方法，它的隶属度除了对应所测量和算出的等级是 1 外，其余全为 0。假定 p_0 对应其论域的第 i 等级， e_0 对应其论域的第 j 等级， ec_0 对应其论域的第 k 等级，那么运算就变得非常简单。

有了模糊控制 u_0 后，按最大隶属度判决法找出对应最大隶属度的离散点，取平均值，再乘以比例因子，就得到实际的输出控制量，即阀门的开度或开度的变化。

对于每一种输入组合 (i, j, k) ， $i=0, 1, \dots, 5$ ； $j=-3, -2, \dots, 4$ ； $k=-3, -2, \dots, 4$ ；都可按以上处理方法得到相应的输出控制量。当取遍论域上所有等级后，就可离线制成模糊控制查询表，如表 6.22 所示。

表 6.22(a) CONTROL TABLE OF $P=0$

误差变化 误差	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	-50.0	-50.0	-45.0	-50.0	-30.0	-20.0	20.0	20.0
-2	-45.0	-45.0	-30.0	-45.0	-25.0	-20.0	20.0	20.0
-1	-50.0	-50.0	-30.0	-20.0	-15.0	0.0	45.0	50.0
0	-50.0	-20.0	-15.0	0.0	15.0	20.0	45.0	50.0
1	-50.0	20.0	-15.0	0.0	15.0	20.0	45.0	50.0
2	-50.0	0.0	15.0	20.0	30.0	50.0	45.0	50.0
3	-20.0	20.0	25.0	45.0	30.0	45.0	45.0	45.0
4	-20.0	20.0	30.0	50.0	45.0	50.0	45.0	50.0

表 6.22(b) CONTROL TABLE OF $P=1$

误差变化 误差	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	-45.0	-45.0	-45.0	-45.0	-30.0	-20.0	0.0	20.0
-2	-45.0	-45.0	-30.0	-30.0	-25.0	-15.0	10.0	30.0
-1	-45.0	-45.0	-30.0	-20.0	-15.0	0.0	30.0	45.0
0	-30.0	-20.0	-15.0	0.0	15.0	20.0	30.0	45.0
1	-30.0	-20.0	-15.0	0.0	15.0	20.0	30.0	45.0
2	-30.0	0.0	15.0	20.0	30.0	45.0	45.0	45.0
3	-10.0	15.0	25.0	30.0	30.0	45.0	45.0	45.0
4	0.0	20.0	30.0	45.0	45.0	45.0	45.0	45.0

表 6.22(c) CONTROL TABLE OF $P=2$

误差变化 误差	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	0.0	0.0	5.0	0.0	20.0	50.0	70.0	70.0
-2	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0	50.0	70.0	70.0
-1	0.0	0.0	5.0	0.0	20.0	50.0	95.0	100.0
0	0.0	0.0	20.0	30.0	50.0	70.0	95.0	100.0
1	0.0	0.0	20.0	30.0	50.0	70.0	95.0	100.0
2	0.0	30.0	35.0	50.0	80.0	100.0	95.0	100.0
3	5.0	50.0	35.0	50.0	80.0	95.0	95.0	95.0
4	0.0	50.0	50.0	50.0	80.0	100.0	95.0	100.0

表 6.22(d) CONTROL TABLE OF $P=3$

误差变化 误差	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	0.0	0.0	5.0	0.0	20.0	50.0	70.0	70.0
-2	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0	50.0	70.0	70.0
-1	0.0	0.0	5.0	0.0	20.0	50.0	95.0	100.0
0	0.0	0.0	20.0	30.0	50.0	70.0	95.0	100.0
1	0.0	0.0	20.0	30.0	50.0	70.0	95.0	100.0
2	0.0	30.0	35.0	50.0	80.0	100.0	95.0	100.0
3	5.0	50.0	35.0	50.0	80.0	95.0	95.0	95.0
4	0.0	50.0	50.0	50.0	80.0	100.0	95.0	100.0

表 6.22(e) CONTROL TABLE OF $P=4$

误差变化 误差	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0	50.0	65.0	70.0
-2	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0	50.0	75.0	80.0
-1	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0	50.0	80.0	95.0
0	5.0	5.0	5.0	5.0	44.0	70.0	80.0	95.0
1	5.0	5.0	5.0	5.0	44.0	70.0	80.0	95.0
2	5.0	5.0	20.0	30.0	56.0	95.0	95.0	95.0
3	5.0	5.0	20.0	30.0	56.0	95.0	95.0	95.0
4	5.0	5.0	20.0	30.0	56.0	95.0	95.0	95.0

表 6.22(f) CONTROL TABLE OF $P=5$

误差变化 误差	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	0.0	0.0	5.0	0.0	20.0	50.0	70.0	70.0
-2	5.0	5.0	5.0	5.0	20.0	50.0	70.0	70.0
-1	0.0	0.0	5.0	0.0	20.0	50.0	95.0	100.0
0	0.0	0.0	5.0	0.0	44.0	70.0	95.0	100.0
1	0.0	0.0	5.0	0.0	44.0	70.0	95.0	100.0
2	0.0	0.0	20.0	30.0	56.0	100.0	95.0	100.0
3	5.0	5.0	20.0	30.0	56.0	95.0	95.0	95.0
4	0.0	0.0	20.0	30.0	56.0	100.0	95.0	100.0

六张控制表中的前两张($P=0,1$)为增量型输出;后四张($P=2,3,4,5$)为绝对量型输出。

实际在线应用时,计算机只存储以上六张控制表,在确定输入量在各自论域中所对应的等级后,经查表就可得到输出控制量。

第七章 模糊线性规划

在运筹学中,规划问题亦称最优化问题。例如,一个工厂在现有人力、设备、资金等条件下如何达到产品产量最大的目标;一件产品在满足质量要求的前提下如何使成本最低;在完成各种产品下达的产量指标的前提下,如何计划各种产品的生产数量以达到最高的经济效益;等等,这类问题都是在一定的约束条件下,求解目标函数的最优值(最大或最小值)的问题,这就是规划问题。

普通的规划问题其约束条件和目标函数都是清晰的、明确的。但在很多实际问题中,约束条件和目标函数都可能具有模糊性,比如约束条件是有弹性的,约束或目标函数有模糊数值等等,这一类在模糊环境即模糊约束或模糊目标下的数学规划问题称为模糊规划。

7.1 模糊判决

Bellman 和 Zadeh 在 1970 年提出了模糊判决(Fuzzy Decision)的概念,为模糊规划奠定了基础。模糊判决也有时译为模糊决策。

设 \tilde{G} 是模糊目标, \tilde{C} 是模糊约束, $\tilde{G} \in F(X)$, $\tilde{C} \in F(X)$, 令:

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= \tilde{G} \cap \tilde{C} \\ D(x) &= \tilde{G}(x) \wedge \tilde{C}(x)\end{aligned}$$

称 \tilde{D} 为(对称型)模糊判决。

若存在 $x^* \in X$, 使:

$$\tilde{D}(x^*) = \max_{x \in X} \tilde{D}(x)$$

则称 x^* 为目标函数在模糊约束下的最佳判决。称经典集合

$$D = \{x^* | \tilde{D}(x^*) = \max_{x \in X} \tilde{D}(x)\}$$

为最佳判决集。

更一般的情况下,设有 n 个模糊目标: $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \dots, \tilde{G}_n$, m 个模糊约束 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_m$, $\tilde{G}_i \in F(X)$, $i=1, 2, \dots, n$, $\tilde{C}_j \in F(X)$, $j=1, 2, \dots, m$, 则模糊判决 \tilde{D} 为:

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= (\bigcap_{i=1}^n \tilde{G}_i) \cap (\bigcap_{j=1}^m \tilde{C}_j) \\ D(x) &= (\bigwedge_{i=1}^n \tilde{G}_i(x)) \wedge (\bigwedge_{j=1}^m \tilde{C}_j(x))\end{aligned}$$

那么模糊判决的数学模型可以由下式表示:

模糊目标: $\tilde{G}_i \in F(X), \quad i = 1, 2, \dots, n$

模糊约束: $\tilde{C}_j \in F(X), \quad j = 1, 2, \dots, m$

模糊判决为:

$$\tilde{D} = (\bigcap_{i=1}^n \tilde{G}_i) \cap (\bigcap_{j=1}^m \tilde{C}_j)$$

$$\tilde{D}(x) = (\bigwedge_{i=1}^n \tilde{G}_i(x)) \wedge (\bigwedge_{j=1}^m \tilde{C}_j(x))$$

在模糊目标 $\tilde{G}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和模糊约束 $\tilde{C}_j, j = 1, 2, \dots, m$ 下的最佳判决 $x^* \in X$ 满足:

$$\tilde{D}(x^*) = \max_{x \in X} \tilde{D}(x) \quad (7.1)$$

例 7.1 董事会决定股东分享红利的方案,从吸引资金的目的考虑,红利应该是“有吸引力的”,从公司的赢利情况看,红利应该是“适度的”。定义“有吸引力的红利”为模糊目标函数,其隶属函数为:

$$\tilde{G}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 5.8 \\ \frac{1}{2900}(-29x^3 + 366x^2 - 877x + 540), & 1 < x < 5.8 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

模糊约束“适度的红利”,其隶属函数为:

$$\tilde{C}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1.2 \\ \frac{1}{2100}(29x^3 - 243x^2 + 16x + 2388), & 1.2 < x < 6 \\ 0, & x \geq 6 \end{cases}$$

那么模糊判决 \tilde{D} 为:

$$\tilde{D}(x) = \min(\tilde{G}(x), \tilde{C}(x))$$

最佳判决 $x^* \in X$ 为:

$$\tilde{D} = \{x^* | \tilde{D}(x^*) = \max_{x \in X} \tilde{D}(x)\}$$

在本例中,如图 7.1 所示,最佳判决 x^* 为一个点,它是 \tilde{G} 与 \tilde{C} 的交即 \tilde{D} 的隶属函数取最大值的点。

Bellman 和 Zadeh 定义的模糊判决采用取小的交运算。但他们指出,这不是唯一的,可以依据不同的情况而修改。更一般更普遍化的模糊判决的概念可以叙述为:“判决等于目标和约束的汇合”(Decision=Confluence of Goals and Constraints)[17]。因此模糊判决更一般化的定义为:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(x) &= \tilde{G}_i(x) * \tilde{C}_j(x), \\ i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

其中 $*$ 表示一个与具体判决内容有关的合适的连接。

常用的模糊判决形式还有:

(1) 凸模糊判决:

$$\tilde{D}^T = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{G}_i + \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{C}_j$$

其中: $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j = 1$ 。

\tilde{D}^T 的隶属函数为:

$$\tilde{D}^T(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{G}_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{C}_j(x) \quad (7.2)$$

在凸模糊判决中, α_i 和 β_j 可以根据各模糊目标和模糊约束的重要程度赋不同的值, 可以看作是 \tilde{G}_i 和 \tilde{C}_j 的权重。

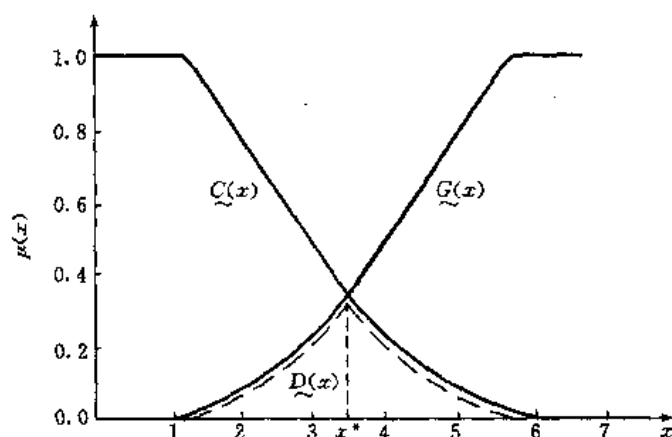


图 7.1 例 7.1 图示

(2) 积模糊判决:

$$\tilde{D}^P = \left(\prod_{i=1}^n \tilde{G}_i \right) \left(\prod_{j=1}^m \tilde{C}_j \right)$$

\tilde{D}^P 的隶属函数为:

$$\tilde{D}^P(x) = \left[\prod_{i=1}^n \tilde{G}_i(x) \right] \left[\prod_{j=1}^m \tilde{C}_j(x) \right] \quad (7.3)$$

当目标和约束为不同论域上的模糊集时, 模糊判决可利用扩张映射来表示。

论模糊目标为: $\tilde{G}_i \in F(x), i=1, 2, \dots, n$, 模糊约束为: $\tilde{C}_j \in F(y), j=1, 2, \dots, m$ 。X 与 Y 之间存在某种关系:

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

我们可利用扩张映射:

$$\begin{aligned} f^{-1}: F(Y) &\rightarrow F(X) \\ \tilde{C}_j &\mapsto f^{-1}(\tilde{C}_j) \end{aligned}$$

将模糊约束 \tilde{C}_j 转换为 X 上的模糊集 $f^{-1}(\tilde{C}_j)$, 化成同一论域的情况来求解。那么模糊约束 \tilde{C}_j 下模糊目标 \tilde{G}_i 的判决 \tilde{D} 为:

$$\tilde{D} = \left(\bigcap_{i=1}^n \tilde{G}_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m f^{-1}(\tilde{C}_j) \right)$$

$$\underset{\sim}{D}(x) = (\bigwedge_{i=1}^n \underset{\sim}{G}_i(x)) \wedge (\bigwedge_{j=1}^m \underset{\sim}{C}_j(f(x))) \quad (7.4)$$

最佳判决 $x^* \in X$, 满足:

$$\underset{\sim}{D}(x^*) = \max_{x \in X} \underset{\sim}{D}(x)$$

可以用图 7.2 表示不同论域下模糊判决的定义。

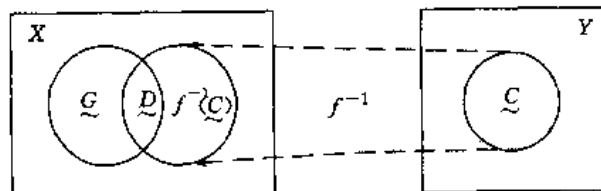


图 7.2 不同论域下的模糊判决

7.2 模糊极值

7.2.1 有界函数的模糊极值

设:

$$f: X \rightarrow R$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

为有界实函数, 那么求函数 $f(x)$ 的普通极值问题, 即求 $x^* \in X$, 使得:

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)$$

那么满足上式的 x^* 为 $f(x)$ 在 X 上的最大值点, 最大值点可以有一个或多个, 设经典集合 M_f 为 $f(x)$ 在 X 上的最大值点的集合, 即:

$$M_f = \{x^* | x \in X, f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)\}$$

称 M_f 为 $f(x)$ 的极大点集。显然, $y^* = f(x^*)$ 为 f 的极大值, 且 $\{y^*\} = f(M_f)$ 。

模糊极值的概念是普通极值概念的模糊化。当 $x \in M_f$ 时, $f(x)$ 在 x 处取到极大值, $f(x)$ 肯定是极大的。当 $x \notin M_f$ 时, $f(x)$ 则不是最大值。但对不同的 x , $f(x)$ 与最大值的差是不同的, 即接近于最大值的程度不同, 它们“极大”的程度不同。为了反映 $f(x)$ 不同的极大程度, 将 M_f 模糊化, 并利用它将极值模糊化, 从而定义模糊极大点集和模糊极值。

定义 7.1 设 $f: X \rightarrow R$ 是有界实函数, 称 $\underset{\sim}{M}_f$ 为 f 的**无条件模糊极大点集**, 其隶属函数定义为:

$$\underset{\sim}{M}_f(x) = \frac{f(x) - \inf_{x \in X} f(x)}{\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)} \quad (7.5)$$

称 $f(\underset{\sim}{M}_f)$ 为 f 的**无条件模糊极大值**, $f(\underset{\sim}{M}_f) \in F(R)$, 其隶属函数用扩张原理定义为:

$$f(\underset{\sim}{M}_f)(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \underset{\sim}{M}_f(x) \quad (7.6)$$

式(7.5)中 $\inf_{x \in X} f(x)$ 和 $\sup_{x \in X} f(x)$ 分别表示 $f(x)$ 的下确界和上确界。

$\underset{\sim}{M}_f(x)$ 和 $f(\underset{\sim}{M}_f)(y)$ 分别反映了 x 属于模糊极大点集的程度和 y 属于 f 的模糊极大值的隶属程度。当 $f(x) = \max_{x \in X} f(x)$ 时, 有 $\underset{\sim}{M}_f(x) = 1$, 且有 $f(\underset{\sim}{M}_f)(f(x)) = 1$, 当 $f(x)$ 越

接近于 $\max_{x \in X} f(x)$, $\tilde{M}_f(x)$ 和 $f(\tilde{M}_f)(y)$ 也越接近于 1。

\tilde{M}_f 是经典极大点集的模糊化, 它可以看成是一种压缩映射, 它把 f 的值域压缩到 $[0, 1]$ 区间, 且 $\tilde{M}_f(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极值点:

$$\tilde{M}_f: R \rightarrow [0, 1]$$

$$f(x) \mapsto \tilde{M}_f(x) = \frac{f(x) - \inf_{x \in X} f(x)}{\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)}$$

因此压缩映射把原来的求 $f(x)$ 极大值的目标函数转化为模糊目标 \tilde{M}_f , 使得我们可以用 7.1 节给出的模糊判决的方法求解问题。

类似 (7.5) 式, f 的极小值对应的模糊极小点集定义为:

$$\tilde{m}_f(x) = \frac{\sup_{x \in X} f(x) - f(x)}{\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)} \quad (7.7)$$

由式 (7.5) 和式 (7.7), 不难得出 $\tilde{M}_f(x) + \tilde{m}_f(x) = 1 (\forall x \in X)$, 故 \tilde{m}_f 是 \tilde{M}_f 的补集。

7.2.2 模糊约束下有界函数的模糊极值

设 C 是 X 上的经典集合, 若 $x^* \in X$ 使:

$$f(x^*) = \max_{x \in C} f(x)$$

称 x^* 为有界实函数 f 在约束条件 C 下的条件最大值点, $f(x^*)$ 为条件极大值, 这是一个普通规划问题。如果约束 C 变为模糊约束 $\tilde{C} \in F(X)$, 那么求 f 在 \tilde{C} 约束下的极大值问题就变为一个模糊规划问题。模糊约束不是生硬的约束, 是有弹性的约束, 有弹性的约束导致目标也是有弹性, 求解这样的模糊规划问题意味着既要最大限度地满足约束, 同时又要最大限度地达到理想目标。

模糊约束下有界函数的模糊极值定义如下:

定义 7.2 设目标函数:

$$f: X \rightarrow R$$

是有界实函数, $\tilde{C} \in F(X)$ 为模糊约束, 令模糊判决:

$$\tilde{D}_f = \tilde{C} \cap \tilde{M}_f$$

\tilde{D}_f 称为 f 在 \tilde{C} 约束下的条件模糊极大点集, 其中 \tilde{M}_f 为定义 7.1 中定义的条件模糊极大点集, 称 $f(\tilde{D}_f)$ 为 f 在 \tilde{C} 约束下的条件模糊极大值。它们的隶属函数分别为:

$$\tilde{M}_f(x): \text{见式 (7.5)}$$

$$\tilde{D}_f(x) = \tilde{C}(x) \wedge \tilde{M}_f(x)$$

$$f(\tilde{D}_f)(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \tilde{D}_f(x) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} (\tilde{C}(x) \wedge \tilde{M}_f(x))$$

解模糊极值问题, 即选择合适的 x , 使 $\tilde{C}(x)$ 和 $\tilde{M}_f(x)$ 都尽可能达到高水平。因为 \tilde{D}_f 为模糊约束 \tilde{C} 和模糊目标 \tilde{M}_f 的模糊判决, 求解模糊极值问题就转化为求解最佳判决, 因此可按下述步骤进行:

(1) 求无条件模糊极大点集 \tilde{M}_f , 见式 (7.5)

(2) 求条件模糊极大点集 $\tilde{D}_f = \tilde{C} \cap \tilde{M}_f$

(3) 求最佳判决, 即求 $x^* \in X$, 使:

$$D_{\tilde{f}}(x^*) = \max_{x \in X} D_{\tilde{f}}(x)$$

那么, $f(x^*)$ 即在模糊约束 \tilde{C} 下 f 可能达到的最优值。

以上讨论是基于目标函数 f 的极大值进行的。若需要求目标函数在模糊约束下的模糊极小值, 只要将 M_f 换为 m_f 即可, 或者变为讨论 $-f$ 的极大值。

例 7.2 汽车行驶每公里耗油量与速度相关, 在某种速度下“省油”。已知甲地与乙地相距 1 000km, 若汽车速度为 v (km/h), 则由甲地到乙地所需时间为 $t=1\,000/v$ (h), 根据公路路面情况估计汽车速度 v “大约 80km/h”耗油最省, 试求在“省油”的约束条件下汽车由甲地到达乙地的最短时间, 汽车速度 v 限定在 20km/h~200km/h 之间。

解: 设 \tilde{C} 表示“大约 80km/h”这一模糊集, \tilde{C} 的隶属函数根据经验设定为:

$$\tilde{C}(v) = e^{-\frac{(v-80)^2}{3\,200}}, \quad v \in V = [20, 200]$$

求汽车由甲地到乙地的最短时间, 是求在 \tilde{C} 约束下函数 $t=f(v)=1\,000/v$ 的极小值。

第一步求函数 f 的无条件模糊极小点集 m_f :

$$m_f(v) = \frac{\sup_{v \in V} f(v) - f(v)}{\sup_{v \in V} f(v) - \inf_{v \in V} f(v)} = \frac{\frac{1\,000}{20} - \frac{1\,000}{v}}{\frac{1\,000}{20} - \frac{1\,000}{200}} = \frac{10v - 200}{9v}$$

第二步求模糊判决, 即条件模糊极小点集:

$$D_{\tilde{f}} = \tilde{C} \cap m_f$$

$$D_{\tilde{f}}(v) = e^{-\frac{(v-80)^2}{3\,200}} \wedge \frac{10v - 200}{9v}$$

图 7.3 中画出了模糊判决的曲线, 曲线限制在论域 $V=[20, 200]$ 上。

第三步求最佳判决, 即求 $v^* \in V$, 使得:

$$D_{\tilde{f}}(v^*) = \max_{v \in V} D_{\tilde{f}}(v)$$

由图 7.3, \tilde{C} 是正态分布的模糊集, m_f 是单调上升的隶属函数, f 在 \tilde{C} 约束下的最佳判决, 是方程:

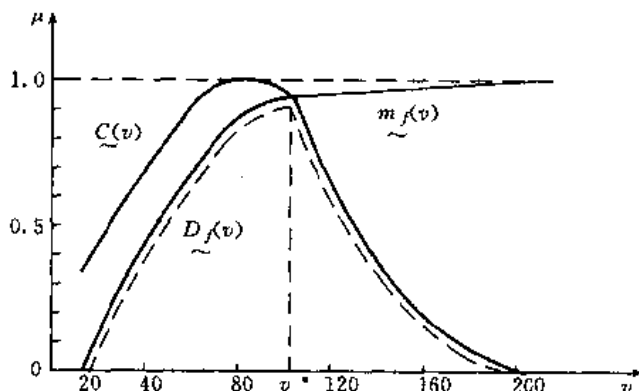


图 7.3 例 7.2 图示

$$e^{-\frac{(v-80)^2}{3200}} = \frac{10v-200}{9v}$$

的解,解之得 $v^* \cong 100$,那么最短时间为 10h。

当 $v^* \cong 100$ 时,有 $D_f(v^*) = 0.889 = 88.9\%$,因此 v^* 受省油约束的程度是 88.9%,最短时间到达乙地的最短程度也是 88.9%。

这个题目是求极小值,也可以转化为求 $-f$ 的极大值方法来解,令:

$$f_-(v) = -f(v) = -\frac{1000}{v}$$

则:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{f_-}(v) &= \frac{-f(v) - \inf_{v \in V}(-f(v))}{\sup_{v \in V}(-f(v)) - \inf_{v \in V}(-f(v))} = \frac{-\frac{1000}{v} - (-50)}{(-5) - (-50)} \\ &= \frac{10v-200}{9v} \end{aligned}$$

可见 $\tilde{M}_{f_-}(v) = \tilde{m}_f(v)$,因此用求解 $-f$ 在模糊约束 \tilde{C} 下的极大值的方法与前面的求 f 的极小值的方法有同样结论。实际上对有界实函数 $f(x)$, $\tilde{M}_{f_-}(x) = \tilde{m}_f(x)$ 总是成立,而且有 $\tilde{M}_f(x) = \tilde{m}_{f_-}(x)$ 。

7.2.3 模糊约束下多目标函数的模糊极值

对于在模糊约束下(可以是多个模糊约束条件),多个目标函数的极值问题的解法,可以采用式(7.1)的模糊判决方法,当式(7.1)中 $i > 1$ 时,表示多目标判决方法,将各个目标函数的无条件模糊极大点集综合成一个新的目标,把多个约束条件综合成一个新的约束,然后按 7.2.2 节中的单目标情形处理。

目标函数为 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, 是 X 上的有界实函数。

约束条件为 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_m \in F(X)$ 。

求解在模糊约束 $\tilde{C}_j, j=1, 2, \dots, m$ 下函数 $f_i(x), i=1, 2, \dots, n$ 均尽可能达到极大值的模糊判决。求解步骤如下:

(1) 求每个 f_i 的无条件模糊极大点集 \tilde{M}_{f_i} :

$$\tilde{M}_{f_i}(x) = \frac{f_i(x) - \inf_{x \in X} f_i(x)}{\sup_{x \in X} f_i(x) - \inf_{x \in X} f_i(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(2) 综合 n 个 \tilde{M}_{f_i} 为一新的目标函数 \tilde{M}_f , \tilde{M}_f 可取为:

$$\tilde{M}_f = \bigcap_{i=1}^n \tilde{M}_{f_i}, \quad \tilde{M}_f(x) = \bigwedge_{i=1}^n \tilde{M}_{f_i}(x)$$

也可根据各 f_i 的重要程度加权取:

$$\tilde{M}_f = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{M}_{f_i}, \quad \tilde{M}_f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{M}_{f_i}(x)$$

式中 a_i 为权重,且有:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

(3) 综合 m 个模糊约束 \tilde{C}_j 为一新的模糊约束 \tilde{C} , \tilde{C} 可取为:

$$\tilde{C} = \bigcap_{j=1}^m \tilde{C}_j, \quad \tilde{C}(x) = \bigwedge_{j=1}^m \tilde{C}_j(x)$$

也可以根据各 \tilde{C}_j 的重要程度加权取:

$$\tilde{C} = \sum_{j=1}^m b_j \tilde{C}_j, \quad \tilde{C}(x) = \sum_{j=1}^m b_j \tilde{C}_j(x)$$

其中 b_j 为权重, 且有:

$$\sum_{j=1}^m b_j = 1$$

(4) 求条件模糊极大点集 \tilde{D}_f , 即模糊目标 \tilde{M}_f 在模糊约束 \tilde{C} 下的模糊判决, \tilde{D}_f 可取为:

$$\tilde{D}_f = \tilde{C} \cap \tilde{M}_f, \quad \tilde{D}_f(x) = \tilde{C}(x) \wedge \tilde{M}_f(x)$$

也可加权取:

$$\tilde{D}_f = \alpha \tilde{C} + (1 - \alpha) \tilde{M}_f, \quad \tilde{D}_f(x) = \alpha \tilde{C}(x) + (1 - \alpha) \tilde{M}_f(x)$$

其中 α 为权重。

(5) 求最佳判决 x^* , x^* 满足:

$$\tilde{D}_f(x^*) = \max_{x \in X} \tilde{D}_f(x)$$

如果某个(些)目标函数 f_i 要求在模糊约束下取极小值, 则按变换成 $-f_i$ 的极大值考虑。

例 7.3 同例 7.2, 目标函数增加一个, 即:

f_1 : 由甲地到乙地所用时间最短, $f_1(v) = \frac{1000}{v}$ 。

f_2 : 汽车载重最大, 令 $f_2(v) = 8e^{-\frac{(v-20)^2}{40000}}$, 当速度 v 增大时, 载重能力下降。

模糊约束: 省油, $\tilde{C}(v) = e^{-\frac{(v-80)^2}{3200}}$ 。

求解在模糊约束 \tilde{C} 下使载重最大且所用时间最少的模糊判决。

解: 第一步: 求 $\tilde{m}_{f_1}(v)$ 和 $\tilde{M}_{f_2}(v)$ 。由例 7.2 有:

$$\tilde{m}_{f_1}(v) = \frac{10v - 200}{9v}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{f_2}(v) &= \frac{f_2(v) - \inf_{v \in V} f_2(v)}{\sup_{v \in V} f_2(v) - \inf_{v \in V} f_2(v)} = \frac{8e^{-\frac{(v-20)^2}{40000}} - 3.56}{8 - 3.56} \\ &= 1.8e^{-\frac{(v-20)^2}{40000}} - 0.8 \end{aligned}$$

第二步: 求 $\tilde{M}_f(v)$:

$$\tilde{M}_f(v) = \tilde{m}_{f_1}(v) \wedge \tilde{M}_{f_2}(v) = \frac{10v - 200}{9v} \wedge (1.8e^{-\frac{(v-20)^2}{40000}} - 0.8)$$

第三步: 求 $\tilde{D}_f(v)$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_f(v) &= \tilde{C}(v) \wedge \tilde{M}_f(v) \\ &= e^{-\frac{(v-80)^2}{3200}} \wedge \frac{10v - 200}{9v} \wedge (1.8e^{-\frac{(v-20)^2}{40000}} - 0.8) \end{aligned}$$

见图 7.4。

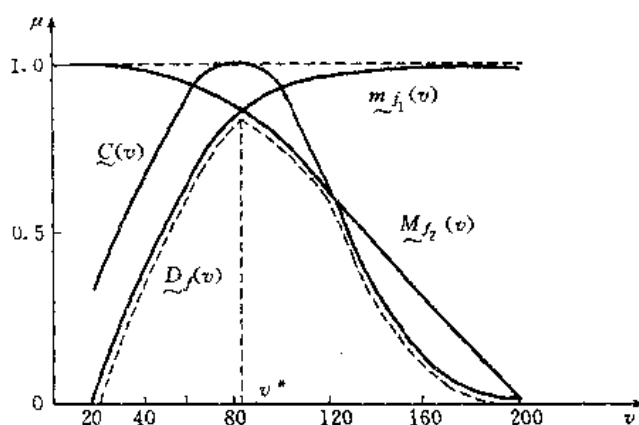


图 7.4 例 7.3 图示

第四步：求最佳判决 v^* , v^* 满足：

$$D_f(v^*) = \max_{v \in V} D_f(v), \quad v = [20, 200]$$

由图 7.4, v^* 即 $D_f(v)$ 取最大值的点, 即方程

$$\frac{10v - 200}{9v} = 1.8e^{-\frac{(v-20)^2}{40000}} - 0.8$$

的解。解之得 $v^* \cong 81.5$, 此时从甲地到达乙地的时间为 12.27h, 汽车载重为 7.28t, 满足行驶时间最短和载重最大的程度均为 0.84, 即 84%, 而满足省油约束的程度为 0.99, 即 99%。

例 7.4 某单位欲购买一辆国产面包车, 购买的基本原则是, 质量要好, 外观式样一般, 生产厂家可信赖, 价格要尽可能便宜。目前市场上有五种型号: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 可选择, 经调查这五种型号的汽车情况如表 7.1 所示。

表 7.1

	1	2	3	4	5
质量	很好	较好	好	欠佳	一般
外观	过时	较陈旧	新奇	较新	一般
厂家	可信	尚可信	可信	尚可信	尚可信
价格/元	10 万	13 万	25 万	15 万	15 万

在论域 X 上定义三个模糊集, 它们是 \tilde{C}_1 : 质量好, \tilde{C}_2 : 外观一般, \tilde{C}_3 : 厂家可信, 将表 7.1 中的语言描述转换为隶属度, 那么 X 中的元素对 $\tilde{C}_i (i=1, 2, 3)$ 的隶属度见表 7.2。

价格 p 是 X 上的有界函数, 要求价格尽可能便宜, 因此 p 越小越好, 因此定义价格 p 的无条件模糊极小点集 \tilde{m}_p :

表 7.2

	1	2	3	4	5
\tilde{C}_1	1	0.8	1	0.4	0.6
\tilde{C}_2	0.2	0.7	0.5	0.8	1
\tilde{C}_3	1	0.8	1	0.8	0.8
\tilde{m}_p	1	0.8	0	0.67	0.67

$$\tilde{m}_p(x) = \frac{\sup_{x \in X} p(x) - p(x)}{\sup_{x \in X} p(x) - \inf_{x \in X} p(x)}$$

$\tilde{m}_p(x)$ 见表 7.2。

将 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ 看成模糊约束, \tilde{m}_p 看成模糊目标。由 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ 综合为一个新的模糊约束, 采用加权求和方法:

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= 0.5\tilde{C}_1 + 0.2\tilde{C}_2 + 0.3\tilde{C}_3 \\ &= \frac{0.84}{1} + \frac{0.78}{2} + \frac{0.9}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.74}{5}\end{aligned}$$

采用凸模糊判决:

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= 0.4\tilde{C} + 0.6\tilde{m}_p \\ &= \frac{0.94}{1} + \frac{0.79}{2} + \frac{0.36}{3} + \frac{0.64}{4} + \frac{0.7}{5}\end{aligned}$$

因为: $\tilde{D}(1) = 0.94 = \max_{x \in X} \tilde{D}(x)$, 故 1 型汽车为最佳判决, 应购 1 型汽车。

7.3 模糊线性规划(FLP)

经典线性规划(LP)是一个最优化问题,它是在满足约束条件下求解目标函数达到极值的问题。目标函数和约束条件一般由一个或一组线性函数式来表达。线性规划在实际问题中有着广泛的应用,它的数学模型是:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (7.8)$$

约束条件为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

其中式(7.8)是线性目标函数式,式(7.9)是一组约束条件。

上述模型可简写,令:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

则式(7.8)和式(7.9)可简记为:

$$\max z = cx$$

约束条件为:
$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

但线性规划的实际问题往往带有模糊性。比如,约束条件可能是有弹性的,允许有一定的伸缩范围;约束条件或目标函数的线性式的系数可以是不确定的有弹性的模糊系数等,这一类线性规划问题称为模糊线性规划(FLP),可以用模糊数学的方法求解,本小节介绍模糊线性规划的解法。

7.3.1 约束条件有伸缩性的 FLP

先看如下例子。

例 7.5 某工厂根据市场预测及自身生产能力,计划开发甲、乙两种型号的产品,甲种产品的年生产能力最多大约能生产 400 件,乙种产品最多大约能生产 250 件。甲种产品成本为每件 3 万元,每件可获利润 7 万元,乙种产品每件成本 2 万元,每件可获利润 3 万元,生产甲、乙两种产品的总投资大约不能超过 1 500 万元。在上述条件下,如何安排上述两种型号的产品的生产,才能使工厂获利最大?

这是一个约束条件具有伸缩性的线性规划问题,“甲种产品最多大约能生产 400 件”,这个年生产能力的约束条件是有弹性的,不是生硬地卡在 400 件以下,可以有一定的伸缩范围。同样乙种产品的年生产能力以及总投资也都具有伸缩性。

约束条件具有伸缩性的模糊线性规划,其数学模型为:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束条件为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

或简记为:

$$\max z = cx$$

约束条件为:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

式中“ \leq ”表示“约小于等于”。约小于等于是一个模糊概念,可以用一个模糊集合来表示它。

设 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, 则 $a_i x \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$, 表示式(7.10)约束条件的第 i 行。我们用模糊集合 \tilde{D}_i 表示 $a_i x \leq b_i$, 即“ $a_i x$ 约小于等于 b_i ”, 那么当 $a_i x \leq b_i$ 时, $a_i x$ 肯定符合这一事实, 应有 $\tilde{D}_i(x) = 1$ 。适当地选择一个伸缩系数 d_i , 当 $a_i x > b_i + d_i$ 时, $a_i x$ 肯定不符合“ $a_i x$ 约小于等于 b_i ”这一概念, 此时应有 $\tilde{D}_i(x) = 0$ 。伸缩系数越小, 表示第 i 个约束越重要, 越严格, 在 b_i 和 $b_i + d_i$ 这一区间范围内, 即 $a_i x \in [b_i, b_i + d_i]$ 时, $\tilde{D}_i(x)$ 应从 1 下降到 0, 为简单计, 一般将 $\tilde{D}_i(x)$ 取为 $a_i x$ 的线性函数, 于是 $\tilde{D}_i(x)$ 可以通过 $a_i x$ 的函数表示:

$$\tilde{D}_i(x) = g_i(a_i x) = \begin{cases} 1, & a_i x \leq b_i \\ 1 - \frac{a_i x - b_i}{d_i}, & b_i < a_i x \leq b_i + d_i \\ 0, & a_i x > b_i + d_i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ 1 - \frac{1}{d_i} (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i), & b_i < \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + d_i \\ 0, & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j > b_i + d_i \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

也可以用图形表示, 如图 7.5。

经过这种处理, 我们将有伸缩性的约束转换成了模糊约束。再令

$$\tilde{D} = \bigcap_{i=1}^m \tilde{D}_i$$

则将 m 个个约束综合为一个模糊约束 \tilde{D} 。

约束的伸缩性必然导致目标的伸缩性, 因此也要将目标模糊化。目标模糊化的方法如下。

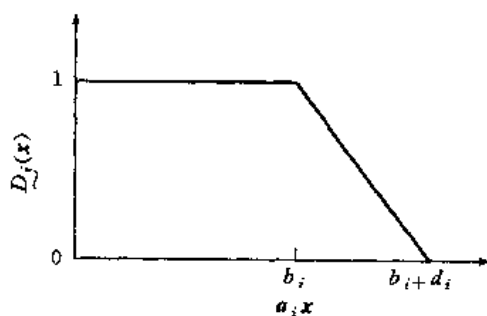


图 7.5 $\tilde{D}_i(x)$

先根据约束伸缩范围两端 b_i 和 $b_i + d_i$ 解这两个端点约束下的经典线性规划, 即:

$$\max z = cx$$

约束条件为:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = cx$$

和:

约束条件为:

$$\begin{cases} Ax \leq b + d \\ x \geq 0 \end{cases}$$

式中 $b+d = (b_1+d_1, b_2+d_2, \dots, b_m+d_m)^T$, b 和 $b+d$ 是伸缩性约束范围的两端。

设 $z_0 = \max\{z | z = cx, Ax \leq b, x \geq 0\}$, 即前一个线性规划的解, 它对应的模糊约束 $\tilde{D}(x) = 1$, 那么只要适当降低模糊约束的隶属度 $\tilde{D}(x)$, 则目标函数的值可相应提高。设 $z_0 + d_0 = \max\{z | z = cx, Ax \leq b + d, x \geq 0\}$, $z_0 + d_0$ 满足的约束条件已放宽到最大的伸缩范围 $Ax \leq b + d$; 对应的模糊约束 $\tilde{D}(x) = 0$ 。可见约束的伸缩性导致了目标的伸缩性, 具体讲, 约束的伸缩范围设为 $[b, b+d]$, 则导致了目标有 $[z_0, z_0 + d_0]$ 的伸缩范围。

由以上分析, 目标的伸缩性可表示为 $z = cx \geq z_0$, 伸缩系数可设为 d_0 。同样取隶属函数为线性函数, 将目标函数模糊化, 有:

$$\tilde{G}(x) = g\left(\sum_{j=1}^n c_j x_j\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq z_0 \\ \frac{1}{d_0} \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j - z_0 \right), & z_0 < \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq z_0 + d_0 \\ 1, & \sum_{j=1}^n c_j x_j > z_0 + d_0 \end{cases}$$

$\tilde{G}(x)$ 用图形表示, 如图 7.6 所示。

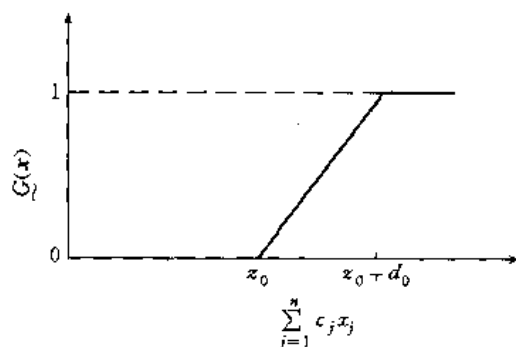


图 7.6 $\tilde{G}(x)$

由于模糊目标 \tilde{G} 的上述隶属函数定义可知, 当 $\tilde{D}(x) = 1$ 时有 $\tilde{G}(x) = 0$, 要提高目标函数的值使之由 z_0 增大, 则必须降低 $\tilde{D}(x)$, 即放宽约束。为了兼顾目标与约束, 按 7.1 节模糊判决的思想, 定义约束条件有伸缩性的 FLP 问题(式 7.10)的模糊判决为:

$$\tilde{D}_f = \tilde{D} \cap \tilde{G}$$

设最佳判决为 x^* , x^* 满足:

$$\tilde{D}_f(x^*) = \max_{x \geq 0} \tilde{D}_f(x) = \max_{x \geq 0} (\tilde{D}(x) \wedge \tilde{G}(x))$$

令: $\lambda = (\tilde{D}(x) \wedge \tilde{G}(x)) \in [0, 1]$

有: $\tilde{D}(x) \geq \lambda, \tilde{G}(x) \geq \lambda$

因此: $\max_{x \geq 0} (\tilde{D}(x) \wedge \tilde{G}(x)) = \max_{x \geq 0} \{\lambda | \tilde{D}(x) \geq \lambda, \tilde{G}(x) \geq \lambda\}$
 $= \max\{\lambda | \tilde{D}_1(x) \geq \lambda, \tilde{D}_2(x) \geq \lambda, \dots, \tilde{D}_m(x) \geq \lambda, \tilde{G}(x) \geq \lambda\}$

于是求最佳判决 x^* 的问题可以转化为求解以下经典线性规划的问题:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{d_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) \geq \lambda, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{1}{d_0} \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j - z_0 \right) \geq \lambda \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

或者:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i \lambda \leq b_i + d_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n c_j x_j - d_0 \lambda \geq z_0 \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

式(7.12)是求最优解 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*)$ 的经典 LP 问题。

式(7.12)可以写成如下形式:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} a_i x \leq b_i + (1 - \lambda) d_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ cx \geq z_0 + d_0 \lambda \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

由(7.13)式可以看出,最大的 λ 解可以使得约束条件伸缩得最小而目标函数取值最大。

求解上述经典线性规划问题,可得:

最佳判决: $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*)$

目标函数值: $z^* = cx^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$

根据上述约束条件具有伸缩性的 FLP 问题的解法,我们来解例 7.5。

设甲种型号产品生产 x_1 件,乙种型号产品生产 x_2 件,那么例 7.5 的问题即求解下述模糊线性规划的问题。

目标函数:

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$

模糊约束:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 1500 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 250 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

设约束条件的伸缩系数分别依次取为 $d_1=50$ 万元, $d_2=5$ 件, $d_3=5$ 件,为将目标函数模糊化,先求解约束条件伸缩范围两个端点情况下的经典线性规划问题。

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 1500 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 250 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

用单纯形法求解,得 $z_0=3250, x_1=400, x_2=150$ 。

再解经典线性规划:

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 1500 + 50 \\ x_1 \leq 400 + 5 \\ x_2 \leq 250 + 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解之得: $z_0+d_0=3337.5, x_1=405, x_2=167.5$

因此: $d_0 = 3337.5 - 3250 = 87.5$

将 z_0, d_0, d_1, d_2, d_3 代入式(7.12),这样原来的模糊线性规划问题就化为经典线性规划问题:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 50\lambda \leq 1500 + 50 \\ x_1 + 5\lambda \leq 400 + 5 \\ x_2 + 5\lambda \leq 250 + 5 \\ 7x_1 + 3x_2 - 87.5\lambda \geq 3250 \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

上式的最优解为: $x_1^*=402.5, x_2^*=158.75, \lambda^*=0.5$ 。取整: $x_1^*=403, x_2^*=159$, 则最大

利润可以达到:

$$z^* = 7x_1^* + 3x_2^* = 3\,298(\text{万元})$$

对比线性规划问题(7.14)式,利润提高了48万元,而总经费投资为 $3x_1^* + 2x_2^* = 1\,527$ 万元,比(7.14)式提高27万元,甲、乙产品数量及总投资均在伸缩指标允许范围之内。可见,在适当放松约束条件下可以提高利润。

7.3.2 多目标 FLP

7.3.2.1 经典多目标 LP 的模糊最优解

经典多目标线性规划有着一个以上的目标函数,均为线性函数式,其数学模型可表示为:

$$\max \begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ z_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases}$$

约束条件为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

上式也可写成简化形式,令:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad C = (c_{ij})_{r \times n}, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_r)^T$$

则上述多目标线性规划可用矩阵形式简记为:

$$\max z = Cx$$

约束条件为:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

由于目标函数不止一个,要想在某个点使所有的目标函数均达到各自的最大值一般是不可能的,因此需要采取折衷方案,使各个目标函数都尽可能地极大。为此,可以将目标函数模糊化,用模糊数学的方法来处理。处理的方法是:

先求各个单目标 $z_i, i=1, 2, \dots, r$, 在约束条件 $Ax \leq b, x \geq 0$ 下的极大值 z_i^* :

$$z_i^* = \max \{z_i \mid z_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j, Ax \leq b, x \geq 0\}, \\ i = 1, 2, \dots, r$$

这是单目标经典线性规划问题。

尔后给出每个目标 $z_i, i=1, 2, \dots, r$ 的伸缩指标 $d_i, d_i > 0$, 越是重要的目标,其伸缩指标应越小。这样就可以把各个目标模糊化,设第 i 个目标 z_i 模糊化为模糊目标 \tilde{G}_i, \tilde{G}_i 的隶

属函数定义为:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_i(x) &= g_i\left(\sum_{j=1}^n c_{ij}x_j\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j < z_i^* - d_i \\ 1 - \frac{1}{d_i}(z_i^* - \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j), & z_i^* - d_i \leq \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j < z_i^* \\ 1, & z_i^* \leq \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \end{cases} \\ & \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

$\tilde{G}_i(x)$ 可由图 7.7 表示。

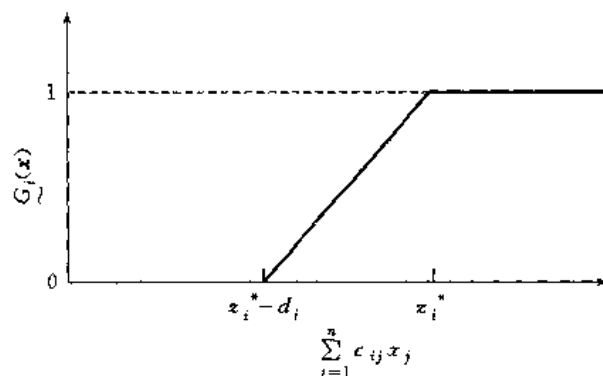


图 7.7 $\tilde{G}_i(x)$

由图 7.7 可见,为了兼顾每个目标都尽可能极大,不得不将 z_i 的伸缩范围定为 z_i^* 点左边的一段长度为 d_i 的区间,即比 z_i^* 值要小的一段范围。对比图 7.6,在具有伸缩性约束的单目标线性规划问题中,由于约束条件放宽了一个范围,因而目标函数则是在原来最大值的基础上伸缩了比原最大值更大的一段范围。

令 $\tilde{G} = \bigcap_{i=1}^r \tilde{G}_i$, 称 \tilde{G} 为经典目标线性规划问题的模糊目标。令 $D = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$, D 是经典集合,为满足约束条件的可能解集合,或称可行解域。到此,我们就可以用模糊判决来求出多目标经典线性规划的模糊最优解。

模糊判决为 $\tilde{D}_f = D \cap \tilde{G}$ 。

最佳判决为 x^* , 定义 x^* 为模糊最优解。 x^* 满足:

$$\tilde{D}_f(x^*) = \max_{x \geq 0} (\mu_D(x) \wedge \mu_{\tilde{G}}(x)) = \max_{x \in D} \tilde{G}(x)$$

可见,模糊最优解 x^* 就是 $\tilde{G}(x)$ 在可行解域 D 上的最大值点。

上述问题也可转化成求解经典线性规划问题。令:

$$\lambda = \tilde{G}(x) = \bigwedge_{i=1}^r \tilde{G}_i(x)$$

那么求解多目标经典线性规划的模糊最优解的问题就可转化为:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{d_i}(z_i^* - \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j) \geq \lambda, & i = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \leq b_k, & k = 1, 2, \dots, m \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

或者表示为:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j - d_i\lambda \geq z_i^* - d_i, & i = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \leq b_k, & k = 1, 2, \dots, m \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

式(7.16)是一个求最优解 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*)$ 的经典线性规划问题。

(7.16)

若把式(7.16)表达为等价的下式:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \geq z_i^* - (1 - \lambda)d_i, & i = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \leq b_k, & k = 1, 2, \dots, m \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

不难看出, $\max \lambda$ 使得各个目标函数 $\sum_{j=1}^n C_{ij}x_j, i=1, 2, \dots, r$, 最接近 z_i^* 。

解式(7.16), 得 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*)$, λ^* 为 λ 的最大值, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 为原经典多目标线性规划的模糊最优解。 $z^{**} = cx^*$, 为目标的最优值。

例 7.6 求解多目标线性规划:

$$\max \begin{cases} z_1 = x_1 + 5x_2 \\ z_2 = -x_1 + 5x_2 \\ z_3 = 8x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

约束条件为:

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 98 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：在约束条件下分别求出三个目标函数 z_1, z_2, z_3 的单目标最优解，分别是：

第一个目标： $x_1=4, x_2=13, z_1^*=69$

第二个目标： $x_1=4, x_2=13, z_2^*=61$

第三个目标： $x_1=10, x_2=8, z_3^*=56$

根据各个目标的重要地位，主观给出三个目标的伸缩指标： $d_1=34, d_2=16, d_3=48$ 。也就是认为第二个目标最重要，由此建立相应的三个模糊目标 $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3$ ，它们的隶属函数分别定义为：

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(x) &= g_1(x_1 + 5x_2) \\ &= \begin{cases} 0, & x_1 + 5x_2 < 35 \\ 1 - \frac{1}{34}(69 - x_1 - 5x_2), & 35 \leq x_1 + 5x_2 < 69 \\ 1, & 69 \leq x_1 + 5x_2 \end{cases} \\ \tilde{G}_2(x) &= g_2(-x_1 + 5x_2) \\ &= \begin{cases} 0, & -x_1 + 5x_2 < 45 \\ 1 - \frac{1}{16}(61 + x_1 - 5x_2), & 45 \leq -x_1 + 5x_2 < 61 \\ 1, & 61 \leq -x_1 + 5x_2 \end{cases} \\ \tilde{G}_3(x) &= g_3(8x_1 - 3x_2) \\ &= \begin{cases} 0, & 8x_1 - 3x_2 < 8 \\ 1 - \frac{1}{48}(56 - 8x_1 + 3x_2), & 8 \leq 8x_1 - 3x_2 < 56 \\ 1, & 56 \leq 8x_1 - 3x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

令 $\tilde{G} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \tilde{G}_3, \tilde{G}(x) = \lambda$ ，那么上述多目标线性规划模糊最优解的问题转化为下述单目标经典线性规划问题。

$$\max \lambda$$

约束条件为：

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 34\lambda \geq 35 \\ -x_1 + 5x_2 - 16\lambda \geq 45 \\ 8x_1 - 3x_2 - 48\lambda \geq 8 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 98 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ \lambda \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

上述线性规划的最优解,即原多目标线性规划的模糊最优解为:

$$x_1^* = 6.4231, \quad x_2^* = 10.9801, \quad \lambda^* = 0.217$$

最优值 z^{**} 为:

$$z_1^{**} = x_1^* + 5x_2^* = 61.3236$$

$$z_2^{**} = -x_1^* + 5x_2^* = 48.4774$$

$$z_3^{**} = 8x_1^* - 3x_2^* = 18.4445$$

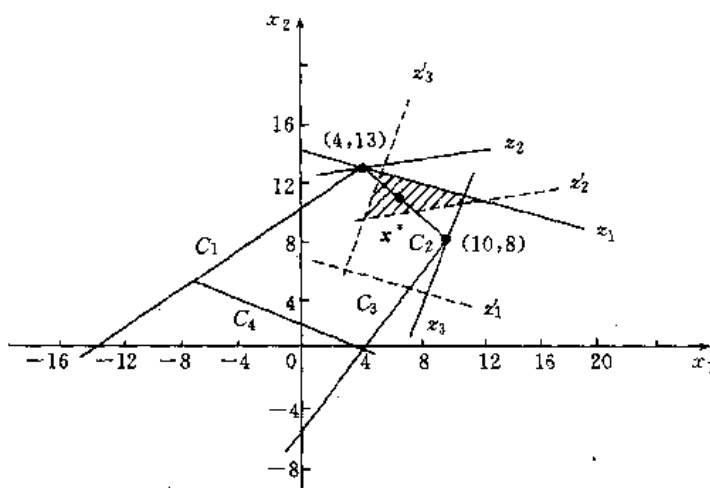


图 7.8 例 7.6 图示

本题的图形表示见图 7.8。图中,约束条件的边界我们分别用直线 C_1, C_2, C_3, C_4 表示。其中 $C_1 = -3x_1 + 4x_2 = 40, C_2 = 5x_1 + 6x_2 = 98, C_3 = 4x_1 - 3x_2 = 16, C_4 = x_1 + 2x_2 = 4$, 目标函数分别用直线 z_1, z_2, z_3 表示, $z_1 = x_1 + 5x_2, z_2 = -x_1 + 5x_2, z_3 = 8x_1 - 3x_2$, 图中为 z_1, z_2, z_3 在满足约束条件时单目标取得最大值的情况。相应的 z'_1, z'_2, z'_3 分别为给定伸缩指标 $d_1 = 34, d_2 = 16, d_3 = 48$ 时 z_1, z_2, z_3 的伸缩范围的极限, 即 z_1 和 z'_1 之间范围为 z_1 的伸缩区间, 余类推。那么图中阴影部分是 z_1, z_2, z_3 伸缩范围的交集。显然 x^* 应落在这个阴影之内, 同时它又须满足约束条件(即又在 C_1, C_2, C_3, C_4 和 $x_1 = 0.5$ 条直线围成的五边形之内), 因此 x^* 应该是在 z'_2, z'_3 和 C_2 三条直线围成的三角形之内。 x^* 又应使 λ 最大, 即 z_1, z_2, z_3 尽可能均达到最大值, 也就是 x^* 点应在允许的范围(在 z'_2, z'_3 和 C_2 组成的三角形内)同时尽可能地靠近 z_1, z_2 和 z_3 。显然它应该在直线 C_2 上。我们用单纯形法解出 $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (6.4231, 10.9801)$ 正是在 C_2 上, 符合图示的分析, 而且它也满足同时尽可能地靠近 z_1, z_2 和 z_3 。设 $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3$ 分别代表模糊化后的三个目标函数, 可以计算它们在 x^* 点隶属度分别为:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(x^*) &= 1 - \frac{1}{d_1}(z_1^* - \sum_{j=1}^2 c_{1j}x_j^*) \\ &= 1 - \frac{1}{34}(69 - x_1^* - 5x_2^*) = 1 - \frac{1}{34}(69 - z_1^{**}) \\ &= 1 - \frac{1}{34}(69 - 61.3236) = 0.77 \end{aligned}$$

同理可得:

$$\tilde{G}_2(x^*) = 0.217, \quad \tilde{G}_3(x^*) = 0.217$$

可见 $\tilde{G}_1(x^*) \wedge \tilde{G}_2(x^*) \wedge \tilde{G}_3(x^*) = 0.217$, 这与我们前面的计算结果 $\lambda^* = 0.217$ 一致。

7.3.2.2 约束条件有伸缩性的多目标 FLP

以下问题是约束条件有伸缩性的多目标模糊线性规划问题:

$$\max \begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ z_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases}$$

约束条件为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

设: $C = (c_{ij})_{r \times n}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)^T$, 则上述(7.17)式的模糊线性规划问题可用矩阵形式简记为:

$$\max z = Cx$$

约束条件为:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

显然, 我们可以综合 7.3.1 小节中约束条件有伸缩性的单目标 FLP 的解法及 7.3.2.1 小节中多目标线性规划的解法来解这一问题。

在约束条件 $Ax \leq b, x \geq 0$ 的情况下, 按着 7.3.2.1 小节的方法, 即经典多目标线性规划问题的方法, 分别将 r 个目标函数模糊化为 r 个模糊目标: $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \dots, \tilde{G}_r$, 并将它们综合成一个模糊目标 $\tilde{G} = \bigcap_{i=1}^r \tilde{G}_i$ 。

按着 7.3.1 小节中处理模糊约束的方法, 根据每个有伸缩性的约束条件的重要性, 给定一个伸缩指标 $d_j, j=1, 2, \dots, m$, 定义每个约束对应的模糊集 \tilde{C}_j , 并综合所有 \tilde{C}_j 为一个模糊约束 $\tilde{C} = \bigcap_{j=1}^m \tilde{C}_j$ 。

求模糊判决和最佳判决。

模糊判决为 $\tilde{D}_f = \tilde{C} \cap \tilde{G}$ 。

最佳判决为 x^*, x^* 满足:

$$\tilde{D}_f(x^*) = \max_{x \geq 0} (\tilde{C}(x) \wedge \tilde{G}(x))$$

求最佳判决 x^* 的问题可以转化为求解下述经典线性规划问题:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \tilde{G}_i(x) \geq \lambda, & i = 1, 2, \dots, r \\ \tilde{C}_j(x) \geq \lambda, & j = 1, 2, \dots, m \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

即:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j - l_i\lambda \geq z_i^* - l_i, & i = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + d_k\lambda \leq b_k + d_k, & k = 1, 2, \dots, m \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, x \geq 0 \end{cases} \quad (7.18)$$

式中 l_i 和 d_k 分别为目标函数和约束条件的伸缩指标。

例 7.7 求: $\max \begin{cases} z_1 = 2x_1 + x_2 \\ z_2 = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

约束条件为:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 78 \\ 3x_1 - x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解: 记 $x = (x_1, x_2)^T$, $b = (40, 78, 27)^T$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

首先求约束条件 $Ax \leq b$ 下两个单目标 z_1, z_2 的最大值, 由单纯形法或作图法可得:

第一个目标 $\max z_1$: 最优解为 $x_1 = 12.2, x_2 = 9.7, z_1^* = 34$, 此时 $z_2 = 17.2$;

第二个目标 $\max z_2$: 最优解为 $x_1 = 9, x_2 = 0, z_2^* = 27$, 此时 $z_1 = 18$ 。

现在同时考虑两个目标, 合理的综合方案应该是 $z_1 \in [18, 34], z_2 \in [17.2, 27]$, 那么为将 z_1, z_2 模糊化, 伸缩指标可取为:

$$l_1 = 34 - 18 = 16, \quad l_2 = 27 - 17.2 = 9.8$$

如果两个目标重要性不同, 例如第二个目标更重要, 可缩小 l_2 , 如取 $l_2 = 6$ 。最后取 $l_1 = 16, l_2 = 6$ 。将 z_1, z_2 模糊化为 \tilde{G}_1, \tilde{G}_2 , 它们的隶属函数定义如下:

$$\tilde{G}_1(x) = g_1(2x_1 + x_2)$$

$$= \begin{cases} 0, & 2x_1 + x_2 < z_1^* - l_1 = 18 \\ 1 - \frac{1}{l_1} \left(z_1^* - \sum_{j=1}^2 c_{1j}x_j \right) = 1 - \frac{1}{16} (34 - 2x_1 - x_2), & 18 \leq 2x_1 + x_2 < z_1^* = 34 \\ 1, & 34 \leq 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$G_2(\mathbf{x}) = g_2(3x_1 - 2x_2)$$

$$\begin{cases} 0, & 3x_1 - 2x_2 < z_2^* - l_2 = 21 \\ 1 - \frac{1}{l_2} \left(z_2^* - \sum_{j=1}^2 c_{2j}x_j \right) = 1 - \frac{1}{6}(27 - 3x_1 + 2x_2), & 21 \leq 3x_1 - 2x_2 < z_2^* = 27 \\ 1, & 27 \leq 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

给定三个约束条件的伸缩指标 $d_1 = d_2 = d_3 = 5$, 按式(7.18), 原问题转换为:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 16\lambda \geq z_1^* - l_1 = 18 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6\lambda \geq z_2^* - l_2 = 21 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5\lambda \leq b_1 + d_1 = 45 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5\lambda \leq b_2 + d_2 = 83 \\ 3x_1 - x_2 + 5\lambda \leq b_3 + d_3 = 32 \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法求得最优解为:

$$x_1^* = 11.29, \quad x_2^* = 4.7, \quad \lambda^* = 0.58$$

对应 z_1 和 z_2 的最优值分别为:

$$z_1^{**} = 27.28, \quad z_2^{**} = 24.47,$$

z_1^{**} 和 z_2^{**} 分别落在 $[z_1^* - l_1, z_1^*] = [18, 34]$ 和 $[z_2^* - l_2, z_2^*] = [21, 27]$ 之间。

本例题的图形表示如图 7.9 所示。图中, 我们分别用直线 C_1, C_2, C_3 表示三个约束条件的边界, 其中 $C_1 = -3x_1 + 2x_2 = 40, C_2 = 4x_1 + 3x_2 = 78, C_3 = 3x_1 - x_2 = 27$ 。用 z_1, z_2 分别表示两个目标函数, $z_1 = 2x_1 + x_2, z_2 = 3x_1 - 2x_2$, 图中直线 z_1, z_2 分别表示两个目标函数在单目标情形下确切约束条件(即“ \leq ”变为“ \geq ”)时取得最大值的情况。此时, $z_1^* = 34$, 对应点 $(12.2, 9.7)$, $z_2^* = 27$, 对应点 $(9, 0)$ 。相应地, z_1', z_2' 则对应给定伸缩指标 $l_1 = 16, l_2 = 6$ 时, 两个目标函数的伸缩范围的边界, 则 z_1 与 z_1' 之间, z_2 与 z_2' 之间分别是第一和第二个目标的伸缩范围。这两个伸缩范围的交集即图中阴影部分, 它是由 z_1, z_1', z_2, z_2' 四条直线组成的平行四边形。显然 \mathbf{x}^* 应该落入这个平行四边形内, 同时 \mathbf{x}^* 也应满足约束条件, 因为本例为约束条件具有伸缩性的多目标 FLP 问题, 给定 $d_1 = d_2 = d_3 = 5$ 为三个约束条件的伸缩范围, 图 7.9 中, 我们用 C_1', C_2', C_3' 分别表示 C_1, C_2, C_3 伸缩范围放宽的边界, 这样例 7.7 的约束条件, 由原本约束条件无伸缩的(\leq 号)的 $C_1, C_2, C_3, x_1 = 0, x_2 = 0.5$ 条直线围成的区域扩大为 $C_1', C_2', C_3', x_1 = 0, x_2 = 0$ 围成的区域, 如图所示, 这样, \mathbf{x}^* 也必须落入这个区域之内。这个区域与阴影部分的交集, 即 $z_1, z_2, z_1', z_2', C_3'$ 围成的区域是 \mathbf{x}^* 应该落入的区域范围, 而且 \mathbf{x}^* 应该尽量地同时靠近 z_1, z_2 和 C_3 。我们的计算结果 $\mathbf{x}^* = (11.29, 4.7)$ 正好落入上述分析的范围之内, 如图 7.9 所示。

设 G_1, G_2 和 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ 分别表示目标和约束对应的模糊集, 可以计算出 \mathbf{x}^* 属于它们的隶属度分别为:

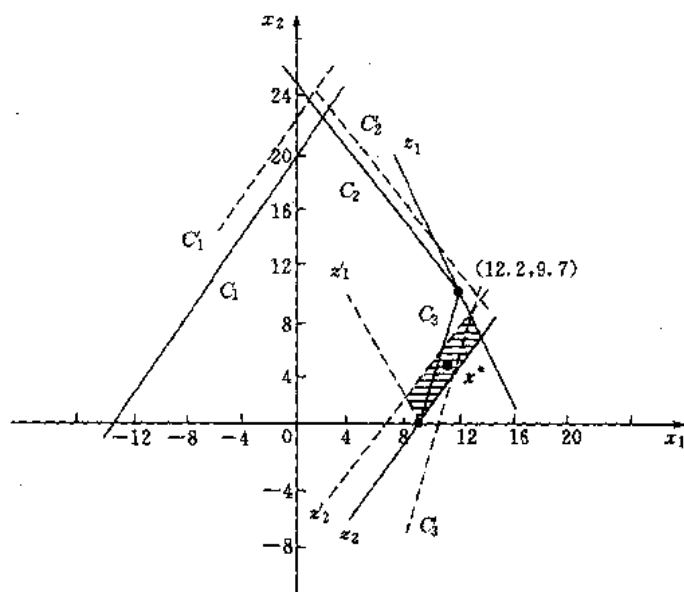


图 7.9 例 7.7 图示

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_1(x^*) &= 1 - \frac{1}{l_1}(z_1^* - 2x_1^* - x_2^*) \\
 &= 1 - \frac{1}{16}(34 - z_1^{**}) \\
 &= 1 - \frac{1}{16}(34 - 27.28) \\
 &= 0.58
 \end{aligned}$$

同理可得:

$$\tilde{G}_2(x^*) = 0.58$$

对于 $\tilde{C}_1(x^*)$, 因为 $-3x_1^* + 2x_2^* = -24.47 < 40 = b_1$ 故:

$$\tilde{C}_1(x^*) = 1$$

对于 $\tilde{C}_2(x^*)$, 因为 $4x_1^* + 3x_2^* = 59.26 < 78 = b_2$, 故:

$$\tilde{C}_2(x^*) = 1$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_3(x^*) &= 1 - \frac{1}{d_3}(3x_1^* - x_2^* - b_3) \\
 &= 1 - \frac{1}{5}(3 \times 11.29 - 4.7 - 27) \\
 &= 0.58
 \end{aligned}$$

所以, $\tilde{G}_1(x^*) \wedge \tilde{G}_2(x^*) \wedge \tilde{C}_1(x^*) \wedge \tilde{C}_2(x^*) \wedge \tilde{C}_3(x^*) = 0.58$, 与我们原来的计算值相符。

由图 7.9 还可看出, 在 $\tilde{G}_1(x^*)$ 和 $\tilde{G}_2(x^*)$ 同为 0.58 的情形下, 由于取 $l_1=16, l_2=6$, x^* 更靠近 z_2 。实际上, $z_1^* - z_1^{**} = 34 - 27.28 = 6.72$, 而 $z_2^* - z_2^{**} = 27 - 24.47 = 2.53 < 6.72 \approx z_1^* - z_1^{**}$ 。

7.3.3 有模糊系数的 FLP

当线性规划问题有模糊系数时,也是一种模糊线性规划,模糊系数可以出现在约束条件的系数中,也可以出现在目标函数的系数中。

7.3.3.1 约束条件系数为 L-R 模糊数的 FLP

约束条件系数为 L-R 模糊数的模糊线性规划问题的数学模型为:

$$\max \begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ z_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases}$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \underline{a}_{11}x_1 + \underline{a}_{12}x_2 + \cdots + \underline{a}_{1n}x_n \leq \underline{b}_1 \\ \underline{a}_{21}x_1 + \underline{a}_{22}x_2 + \cdots + \underline{a}_{2n}x_n \leq \underline{b}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \underline{a}_{m1}x_1 + \underline{a}_{m2}x_2 + \cdots + \underline{a}_{mn}x_n \leq \underline{b}_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (7.19)$$

式中, $\underline{a}_{ij}, \underline{b}_i, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ 均为 L-R 模糊数。

令 $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})_{m \times n}, \underline{C} = (c_{kj})_{r \times n}, \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T, \underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_r)^T$, 则式(7.19)可简记为:

$$\max z = \underline{C}x$$

约束条件为:
$$\begin{cases} \underline{A}x \leq \underline{b} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

设 L-R 模糊数 \underline{a}_{ij} 和 \underline{b}_i 分别表示为:

$$\underline{a}_{ij} = (a_{ij}; \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij})_{LR}, \underline{b}_i = (b_i; \underline{b}_i, \bar{b}_i)_{LR}$$

普通实数认为是左右展形均为 0 的特殊 L-R 模糊数, 如实数 $m = (m; 0, 0)_{LR}$ 。

由 L-R 模糊数的运算(见第三章), 并注意到 $x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n$, 于是有 $\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}x_j$ 也是 L-R 模糊数, 且有:

$$\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}x_j = (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j; \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}x_j, \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}x_j)_{LR}$$

于是式(7.19)的约束条件可表示为:

$$(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j; \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}x_j, \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}x_j)_{LR} \leq (b_i; \underline{b}_i, \bar{b}_i)_{LR} \quad (7.20)$$

按 3.3 节最后的说明, 即:

$$\underline{m} < \underline{n} \Leftrightarrow m \leq n, \alpha \geq \gamma, \beta \leq \delta$$

其中:

$$\underline{m} = (m; \alpha, \beta)_{LR}, \underline{n} = (n; \gamma, \delta)_{LR}$$

式(7.20)可表示为三个等价的式子:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}x_j \geq \underline{b}_i, \quad \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}x_j \leq \bar{b}_i$$

这样,约束条件系数为 L-R 模糊数的模糊线性规划问题(式 7.19)可以转化为下述有 $3m$ 个约束条件的多目标普通线性规划问题:

$$\max z_k = \sum_{j=1}^n c_{kj}x_j$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}x_j \geq \underline{b}_i \\ \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}x_j \leq \bar{b}_i \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

式中, $k=1, 2, \dots, r, i=1, 2, \dots, m$ 。那么这个多目标线性规划问题,可以按 7.4.2.1 小节的方法来解决。

例 7.8 某药品加工厂生产甲、乙两种药品,甲种药品每 kg 利润 3 万元,乙种药品每公斤利润 4 万元。生产每公斤甲种药品需要原料 A 约 4kg 不到一点,需原料 B 约 12kg 多一点。生产每公斤乙种药品需要原料 A 约 20kg,需要原料 B 约 6.4kg。现原料 A 还有约 4 600kg,原料 B 还有约 4 800 多 kg,问如何安排甲、乙两种药品的产量能使利润最大?

解:用 L-R 模糊数表示题目中的模糊系数:

“约 4kg 不到一点”: $\underline{4} = (4; 1, 0)_{LR}$

“约 20kg 多一点”: $\underline{20} = (20; 0, 0.5)_{LR}$

“约 12kg”: $\underline{12} = (12; 1, 1)_{LR}$

“约 6.4kg”: $\underline{6.4} = (6.4; 1, 1)_{LR}$

“约 4 600kg”: $\underline{4\ 600} = (4\ 600; 100, 100)_{LR}$

“约 4 800 多 kg”: $\underline{4\ 800} = (4800; 200, 450)_{LR}$

以上问题为约束条件有 L-R 模糊数的线性规划问题。设甲、乙两种药品各生产 x_1, x_2 kg, 则该问题的数学模型有:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \underline{4}x_1 + \underline{20}x_2 \leq \underline{4\ 600} \\ \underline{12}x_1 + \underline{6.4}x_2 \leq \underline{4\ 800} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

以上约束条件有 L-R 模糊数的线性规划问题可以根据式(7.21)转化为如下的普通线性规划问题:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 4x_1 + 20x_2 \leq 4600 \\ x_1 \geq 100 \\ x_2 \leq 200 \\ 12x_1 + 6.4x_2 \leq 4800 \\ x_1 + x_2 \geq 200 \\ x_1 + x_2 \leq 450 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

用图形解上述经典线性规划问题,如图 7.10 所示,图中阴影部分为可行解域,其中直线 1,2,3,4,5,6 分别表示:

1: $4x_1 + 20x_2 = 4600$

2: $x_1 = 100$

3: $x_2 = 200$

4: $12x_1 + 6.4x_2 = 4800$

5: $x_1 + x_2 = 200$

6: $x_1 + x_2 = 450$

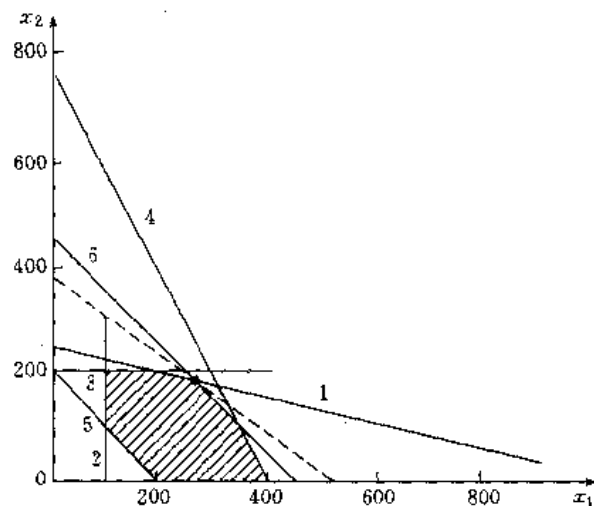


图 7.10 例 7.8 图示

虚线表示目标函数。求解得本例题的最佳点 $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (275, 175)$, 即 $x_1^* = 275\text{kg}$, $x_2^* = 175$ 公斤, 最大利润 $z^* = 3x_1^* + 4x_2^* = 1525$ 万元。

7.3.3.2 目标函数系数为 L-R 模糊数的 FLP

目标函数有模糊系数, 设模糊系数也为 L-R 模糊数, 这种线性规划的数学模型如下:

$$\max \begin{cases} z_1 = \underline{c}_{11}x_1 + \underline{c}_{12}x_2 + \cdots + \underline{c}_{1n}x_n \\ z_2 = \underline{c}_{21}x_1 + \underline{c}_{22}x_2 + \cdots + \underline{c}_{2n}x_n \\ \cdots \cdots \\ z_r = \underline{c}_{r1}x_1 + \underline{c}_{r2}x_2 + \cdots + \underline{c}_{rn}x_n \end{cases}$$

约束条件为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

式(7.22)表示的模糊线性规划中,目标函数含有模糊系数 $\underline{c}_{kj}, k=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,n$ 。(7.22)式也可简记为:

$$\max z_k = \sum_{j=1}^n \underline{c}_{kj}x_j, \quad k=1,2,\cdots,r$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

\underline{c}_{kj} 为 L-R 模糊数, 设 $\underline{c}_{kj} = (c_{kj}; \underline{c}_{kj}, \bar{c}_{kj})_{LR}$, 那么 $\sum_{j=1}^n \underline{c}_{kj}x_j$ 也为 L-R 型模糊数, 并有:

$$\max z_k = \max_{x \in X} \left(\sum_{j=1}^n c_{kj}x_j; \sum_{j=1}^n \underline{c}_{kj}x_j, \sum_{j=1}^n \bar{c}_{kj}x_j \right)_{LR}$$

对于两个 L-R 模糊数比较大小, 设

$$\underline{m} = (m; \alpha, \beta)_{LR}, \quad \underline{n} = (n; \gamma, \delta)_{LR}$$

有:

$$\underline{m} \geq \underline{n} \Leftrightarrow m \geq n, \alpha \leq \gamma, \beta \geq \delta$$

因此, 原问题式(7.22)等价于有 $3r$ 个目标函数的经典线性规划问题。

$$\begin{cases} \max z_k = \sum_{j=1}^n c_{kj}x_j \\ \min \underline{z}_k = \sum_{j=1}^n \underline{c}_{kj}x_j \\ \max \bar{z}_k = \sum_{j=1}^n \bar{c}_{kj}x_j \end{cases} \quad k=1,2,\cdots,r$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases} \quad (7.23)$$

这样原问题式(7.22)就可以按 7.3.2.1 小节的方法来解。

例 7.9 解下面的模糊线性规划问题:

$$\max z = \underline{20}x_1 + \underline{10}x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

其中:

$$\underline{20} = (20; 3, 4)_{LR}, \quad \underline{10} = (10; 2, 1)_{LR}$$

解: 本例等价于以下有三个目标函数的线性规划问题:

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\min \underline{z} = 3x_1 + 2x_2$$

$$\max \bar{z} = 4x_1 + x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

分别对每个目标求出最优解:

$$\max z; x_1 = 0, x_2 = 10.5, z = 105, \underline{z} = 21, \bar{z} = 10.5$$

$$\min \underline{z}; x_1 = 0, x_2 = 0, \underline{z} = 0, \underline{z} = 0, \bar{z} = 0$$

$$\max \bar{z}; x_1 = 3.5, x_2 = 0, \bar{z} = 14, z = 70, \underline{z} = 10.5$$

求同时满足三个目标时的模糊最优解。取伸缩指标分别为 $d_1=5, d_2=20, d_3=4$, 将三个目标分别转换为模糊目标:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \begin{cases} 0, & 20x_1 + 10x_2 < 100 \\ 1 - \frac{1}{5}(105 - 20x_1 - 10x_2), & 100 \leq 20x_1 + 10x_2 < 105 \\ 1, & 105 \leq 20x_1 + 10x_2 \end{cases} \\ G_2(x) &= \begin{cases} 0, & 20 < 3x_1 + 2x_2 \\ 1 - \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2), & 0 \leq 3x_1 + 2x_2 \leq 20 \end{cases} \\ G_3(x) &= \begin{cases} 0, & 4x_1 + x_2 < 10 \\ 1 - \frac{1}{4}(14 - 4x_1 - x_2), & 10 \leq 4x_1 + x_2 < 14 \\ 1, & 14 \leq 4x_1 + x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

因为 $G_2(x)$ 是由 $\min \underline{z}$ 求最小值转化来的模糊目标, 它与 $G_1(x), G_3(x)$ (由求最大转化来) 有不同的形式。 $G_2(x)$ 越大, 则 \underline{z} 越小。

问题化为求解以下经典线性规划问题。

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \underline{G}_1(x) \geq \lambda \\ \underline{G}_2(x) \geq \lambda \\ \underline{G}_3(x) \geq \lambda \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

式中, $\lambda = \underline{G}_1(x) \wedge \underline{G}_2(x) \wedge \underline{G}_3(x)$ 。上式即:

$$\max \lambda$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 5\lambda \geq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 + 20\lambda \leq 20 \\ 4x_1 + x_2 - 4\lambda \geq 10 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ \lambda \leq 1 \\ \lambda \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解得最优解为 $x_1^* = 0.488, x_2^* = 9.035, \lambda^* = 0.022, z^* = 100.11, \underline{z}^* = 19.534, \bar{z}^* = 10.987$ 。

当伸缩指标取得不当时,原问题导出的经典线性规划问题可能无解,这时需调整伸缩指标。

7.3.3.3 用线性区间法解 FLP

Negoita 提出用线性区间法解约束条件含有模糊系数的模糊线性规划问题[72]。

考察下面的模糊线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{约束条件为: } &\begin{cases} \underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \cdots + \underline{a}_nx_n \subseteq \underline{b} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.24)$$

式中, $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$ 为凸模糊集合。

使用水平截集就可以把这个问题转化为线性区间规划问题。由分解定理, \underline{b} 可以用水平截集表示为:

$$\underline{b} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{b})_\lambda$$

由 3.2 节多元扩张映射的性质 3.3, 即:

$$f(\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_n) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f((\underline{A}_1)_\lambda, (\underline{A}_2)_\lambda, \dots, (\underline{A}_n)_\lambda)$$

那么式(7.24)中模糊约束条件式的左边可以用水平截集表示为:

$$\begin{aligned} &\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \cdots + \underline{a}_nx_n \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(x_1(\underline{a}_1)_\lambda + x_2(\underline{a}_2)_\lambda + \cdots + x_n(\underline{a}_n)_\lambda) \end{aligned}$$

于是有:

$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(x_1(\underline{a}_1)_\lambda + x_2(\underline{a}_2)_\lambda + \cdots + x_n(\underline{a}_n)_\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{b})_\lambda$$

假设用 r 个水平截集近似构成模糊集合, 即:

$$\bigcup_{i=1}^r \lambda_i(x_1(\underline{a}_1)_{\lambda_i} + x_2(\underline{a}_2)_{\lambda_i} + \cdots + x_n(\underline{a}_n)_{\lambda_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^r \lambda_i(\underline{b})_{\lambda_i}$$

由上式可得 r 个式子:

$$x_1(\underline{a}_1)_{\lambda_i} + x_2(\underline{a}_2)_{\lambda_i} + \cdots + x_n(\underline{a}_n)_{\lambda_i} \subseteq (\underline{b})_{\lambda_i} \\ i = 1, 2, \cdots, r$$

把水平截集用区间数表示:

$$(\underline{a}_j)_{\lambda_i} = [a_{ij}, b_{ij}], \quad (\underline{b})_{\lambda_i} = [a_i, b_i] \\ i = 1, 2, \cdots, r; \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

则有:

$$[a_{i1}, b_{i1}]x_1 + [a_{i2}, b_{i2}]x_2 + \cdots + [a_{in}, b_{in}]x_n \subseteq [a_i, b_i] \\ i = 1, 2, \cdots, r$$

当系数取最极端值时也应满足上式, 因此上式又可化为:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq a_i \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n \leq b_i \\ i = 1, 2, \cdots, r$$

于是原问题式(7.23)可转化为如下经典线性规划问题:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束条件为:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq a_i \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

原问题的一个模糊约束条件变为 $2r$ 个通常的约束。

例 7.10 下列为系数用区间表示的线性规划问题:

$$\min 3x_1 + 2x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} [0.02, 0.03]x_1 + [0.05, 0.06]x_2 \subseteq [10.5, 15.6] \\ [0.1, 0.5]x_1 - [0.01, 0.02]x_2 \subseteq [0.35, 0.53] \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

上述问题可转化下述经典线性规划问题:

$$\min 3x_1 + 2x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 0.02x_1 + 0.05x_2 \geq 10.5 \\ 0.03x_1 + 0.06x_2 \leq 15.6 \\ 0.1x_1 - 0.02x_2 \geq 0.35 \\ 0.5x_1 - 0.01x_2 \leq 0.53 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

注意区间数的减法运算 $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$, 也可变为 $[a, b] - [c, d] = [a, b] + [-d, -c] = [a - d, b - c]$ 。

7.4 模糊线性规划的图解法

FLP 的解法是先具有伸缩性约束和目标化为模糊约束和模糊目标,分别定义隶属函数,把 FLP 问题转化为 LP 问题求解,解题过程比较复杂,需要借助 LP 的算法程序由计算机求解。

二维的 LP 问题有一种图解法,它简单直观,不需要计算机和 LP 算法软件。它能直观地给出决策变量的可行域及其在可行域内变化时目标函数的变化趋势,便于对最优化问题进行分析。图解法不失为一种有应用价值的方法。

受 LP 的图解法的启发,此处给出一种二维 FLP 问题的图解法,适合解约束条件有伸缩性的 FLP,它具有 LP 问题图解法同样的优点。

图解法受绘图精度的限制不能给出线性规划的精确解,但对于一般的 LP 问题,尤其是 FLP 问题它本身就包含有约束或目标的模糊性,绘图的误差一般是工程上可以允许的。

约束条件有伸缩性的 FLP 问题通常采用 H. J. Zimmermann 的方法来描述和求解:

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

它包含 n 个变量, m 个约束条件, \leq 表示“约小于等于”,是一模糊概念,表示具有伸缩性的约束条件。给约束条件一个伸缩范围,称伸缩指标, $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$, 每个 $d_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 对应一个模糊约束 \underline{D}_i , 其隶属函数 $\underline{D}_i(x)$ 定义为:

$$\underline{D}_i(x) = \begin{cases} 1, & a_i x \leq b_i \\ 1 - \frac{1}{d_i}(a_i x - b_i), & b_i < a_i x \leq b_i + d_i \\ 0, & b_i + d_i < a_i x \end{cases} \quad (7.26)$$

式(7.26)如图 7.5 所示。由图 7.5 可见,在伸缩范围 b_i 和 $b_i + d_i$ 之间, $\underline{D}_i(x)$ 由 1 变为 0。将 m 个模糊约束综合为一个模糊约束 \underline{D} :

$$\underline{D} = \bigcap_{i=1}^m \underline{D}_i$$

约束的伸缩性必然导致目标的伸缩性,目标也需进行模糊化处理。用 LP 问题的某种解法求出约束条件不伸缩时 ($Ax \leq b$) 的解 z_0 和约束条件伸缩到最大范围时 ($Ax \leq b + d$) 的解 z'_0 。目标的伸缩性可表示为 $z = cx \geq z_0$, 选伸缩系数为 $d_0 = z'_0 - z_0$, 设模糊目标为 \underline{G} , 定义:

$$\underline{G}(x) = \begin{cases} 0, & cx \leq z_0 \\ \frac{1}{d_0}(cx - z_0), & z_0 < cx \leq z_0 + d_0 \\ 1, & z_0 + d_0 < cx \end{cases} \quad (7.27)$$

$\underline{G}(x)$ 如图 7.6 所示。

兼顾目标和约束,定义 FLP 的模糊判决为:

$$\underline{D}_f = \underline{D} \cap \underline{G}$$

设 FLP 的最优解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} \underline{D}_f(x^*) &= \max_{x \geq 0} \underline{D}_f(x) = \max_{x \geq 0} (\underline{D}(x) \wedge \underline{G}(x)) \\ &= \max_{x \geq 0} (\underline{D}_1(x) \wedge \underline{D}_2(x) \wedge \cdots \wedge \underline{D}_m(x) \wedge \underline{G}(x)) \end{aligned} \quad (7.28)$$

由(7.28)式以及(7.25), (7.26), (7.27)式, 可以将 FLP 化为 LP 来解, 见 7.3 小节, 此处不再赘述。

我们先结合一个例子说明 FLP 图解方法, 然后进行必要的归纳总结和证明。

FLP 问题如下:

目标: $\max z = 3x_1 + 4x_2$

约束 1: $x_1 + 4x_2 \leq 160$

约束 2: $x_1 \leq 40$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

两个有伸缩性的约束条件的伸缩指标 d_1 和 d_2 分别为 40 和 5。FLP 图解法示于图 7.11, 步骤和思路如下:

(1) 用 LP 图解法求出约束条件未伸缩时的解, 如图 7.11 中实线部分所示, 可行域为凸四边形 $ABCD$, 目标函数的等值线 IH 交可行域顶点 B , B 点为最优解 $x_1 = 40, x_2 = 30, z_0 = 240$ 。

(2) 用 LP 图解法求出约束条件伸缩到最大范围时的解, 如图 7.11 中虚线部分所示, 可行域伸缩成四边形 $A'B'C'D$, 目标函数等值线 EF 交可行域顶点 B' , B' 点为最优解, $x_1 = 45, x_2 = 38.75, z'_0 = 290$ 。

取 $d_0 = z'_0 - z_0 = 50$ 为目标函数 z 的伸缩指标。

(3) 当约束条件伸缩范围增大, 最优解由 B 点向 B' 点移动, 移动中它逐渐远离不伸缩的约束条件 1 和 2, 即直线 BF 和 BE , 由式(7.26)和图 7.5, $\underline{D}_1(x)$ 和 $\underline{D}_2(x)$ 逐渐减小, 同时它逐渐靠近最大伸缩目标线 EF , 由式(7.27)和图 7.6, $\underline{G}(x)$ 逐渐增大。现在要寻找一合适的点, 对应 x^* , 使式(7.28)成立, 为此先给出如下定义。

定义 7.3 每个约束条件和目标的伸缩范围为伸缩前、后两条平行等值线之间区域, 称伸缩域。两个不同伸缩域的交为平行四边形, 称伸缩平行四边形。

显然伸缩域的两条边线上的点其模糊约束或模糊目标的隶属度分别为 0 和 1。分别对应于图 7.5 横坐标上的 $b_i + d_i$ 和 b_i 点以及图 7.6 横坐标上 z_0 和 $z_0 + d_0$ 点。两条平行线之间的距离对应于伸缩指标。

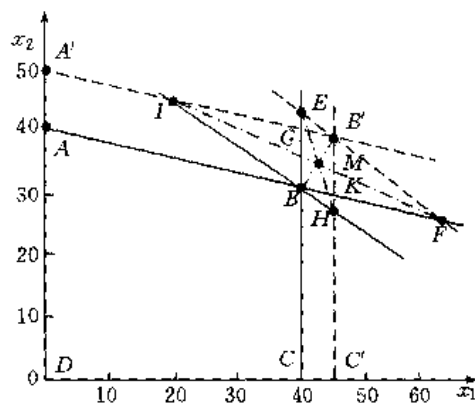


图 7.11 FLP 图解法示例

图 7.11 中平行四边形 $BGB'K$, $BEB'H$, $BIB'F$ 为伸缩平行四边形。

定义 7.4 在 FLP 的图解中,由三条隶属度为 0 的伸缩域的边线组成一个三角形,边线上的点向三角形内的方向移动时,隶属度由 0 逐渐增大。它的一个顶点是模糊约束伸缩到最大范围时 LP 问题的最优解,该三角形称为伸缩三角形。

图 7.11 中, $\triangle IB'H$ 为伸缩三角形。三角形内区域为两个或三个伸缩域的交,FLP 问题的解,由三角形的一条边上的点(B 点)开始,向对面顶点(B' 点)移动,移动过程, $\underline{D}(\mathbf{x})$ 式由 0 逐渐增大,到达最优解点时达到最大值,然后又逐渐减小至 0。最优解在伸缩三角形范围内。

定义 7.5 伸缩三角形每一角的一条分角线称等隶属度分角线,其作法是:找出包含该角的伸缩平行四边形,连接包含该角顶点的对角线。

FLP 的最优解图解法如下:

对伸缩三角形,如图 7.11 $\triangle IB'H$ 的一个角作等隶属度分角线,图 7.11 中,含 $\angle B'IH$ 的伸缩平行四边形为 $BIB'F$,连接对角线 IF ,如图点划线所示。对另一角如 $\angle IHB'$ 同样处理,相应的伸缩平行四边形为 $BEB'H$,连对角线 EH ,与 IF 交于 M 点, M 点为最优解 \mathbf{x}^* ,它满足式(7.28)。实际上伸缩三角形的三个等隶属度分角线交于一点(图 7.11),作任意两个角的等隶属度分角线均可。由图 7.11, M 点坐标为 $(42.5, 34)$,于是 $z^* = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = 263.5$ 。

综上,FLP 的图解法归纳如下:

- 第一步:用经典 LP 的图解法,作约束条件未伸缩时 LP 的图形解。
- 第二步:用经典 LP 的图解法,作约束条件伸缩到最大范围时 LP 的图形解。
- 第三步:作伸缩三角形的两条等隶属度分角线,交点即最优解,据此求得最大目标函数值。

下面给出图解法的证明。

FLP 图解法的证明关键是证明上述作图步骤第三步,即伸缩三角形等隶属度分度线的交点满足式(7.28),为最优解 \mathbf{x}^* 。

为清晰计,将图 7.11 局部放大,示于图 7.12,所用符号与图 7.11 完全一致。

由 M 点向伸缩三角形 $IB'H$ 的三条边 IH , IB' , $B'H$ 分别作垂直线,如图 7.12 的

MR, MS, MT , 它们表示 M 点到三个伸缩域隶属度为 0 的边线的距离。由伸缩平行四边形的顶点 F 分别作伸缩三角形 $IB'H$ 的两个边 IH, IB' 的垂线 FP 和 FQ , 显然它们分别对应了模糊目标和模糊约束条件 1 的最大伸缩范围, 即 d_0 和 d_1 , 由 $\triangle IPF$, 有 $\frac{MR}{FP} = \frac{IM}{IF}$ 。由 $\triangle IQF$, 有 $\frac{MS}{FQ} = \frac{IM}{IF}$ 。因此, $\frac{MR}{FP} = \frac{MS}{FQ}$ 。由于 MR 和 MS 表示了 M 点到模糊目标伸缩域和模糊约束条件 1 伸缩域隶属度为 0 的边线 IH 和 IB' 的距离, 分别对应图 7.6 横坐标上 cx^* 到 z_0 和图 7.5 横坐标上 a_1x^* 到 $b_1 + d_1$ 的距离, 以模糊约束 1 为例示于图 7.13, 显然有:

$$\frac{MS}{FQ} = \frac{(b_1 + d_1) - a_1x^*}{d_1} = \frac{D_1(x^*)}{1} = D_1(x^*)$$

同样可得:

$$\frac{MR}{FP} = G(x^*)$$

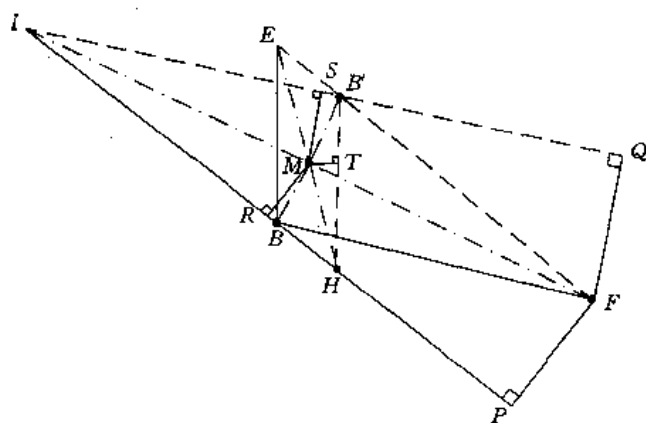


图 7.12 图 7.11 的局部放大

那么:

$$D_1(x^*) = G(x^*) \quad (7.29)$$

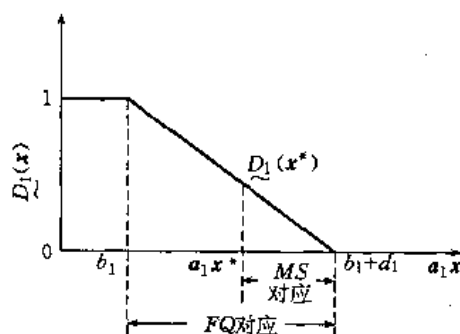


图 7.13 模糊约束 1

同理可证: $\underline{D}_1(x^*) = \underline{D}_2(x^*)$

故: $\underline{D}_1(x^*) = \underline{D}_2(x^*) = \underline{G}(x^*)$ (7.30)

由(7.29)式的证明过程可知,实际上对于伸缩平行四边形对角线即伸缩三角形等隶属度分角线上的任意一点 x ,均有 x 对两个伸缩约束条件(或目标)的隶属度相等。这正是称为等隶属度分角线的原因。

将图 7.11 局部放大,伸缩三角形部分示于图 7.14,过 M 点分别作伸缩三角形三条边的平行线,如图 7.14, LN 平行于 IH , VU 平行于 IB' , WJ 平行于 HB' 。

对于在四边形 $IB'VU$ 中但不在其边线 VU 上的任何点 M' ,对应 x' ,显然 M' 到 IB' 的距离小于 MS ,由图 7.13, a_1x' 点在 a_1x^* 和 b_1+d_1 之间, a_1x' 到 b_1+d_1 的距离小于 a_1x^* 到 b_1+d_1 的距离。因此, $\underline{D}_1(x') < \underline{D}_1(x^*)$ 。由式(7.30):

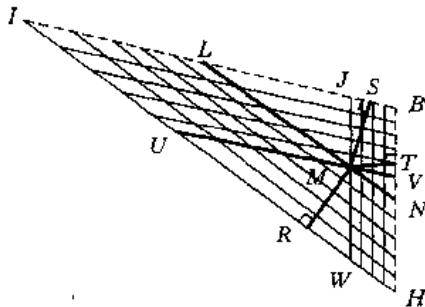


图 7.14 伸缩三角形

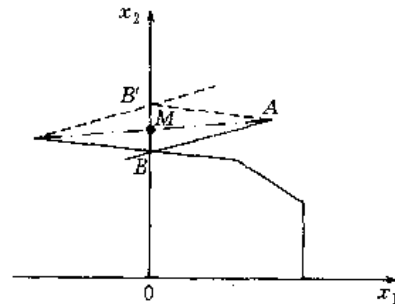


图 7.15 LP 的最优解在 x_2 轴上的情况

$$\underline{D}_1(x') < \underline{D}_1(x^*) = \underline{D}_2(x^*) = \underline{G}(x^*)$$

故:

$$\max_{x \geq 0} (\underline{D}_1(x') \wedge \underline{D}_2(x') \wedge \underline{G}_2(x')) < \max_{x \geq 0} (\underline{D}_1(x^*) \wedge \underline{D}_2(x^*) \wedge \underline{G}(x^*)) \quad (7.31)$$

同理,若 M' 点在四边形 $B'HWJ$ 中但不在边线 WJ 上的任何处,或 M' 在四边形 $HILN$ 中但不在边线 LN 上,均有(7.31)式成立。由图 7.14,又有:

$$\begin{aligned} & (\text{四边形 } IB'VU \text{ 除外边线 } VU) \cup (\text{四边形 } B'HWJ \text{ 除外边线 } WJ) \\ & \cup (\text{四边形 } HILN \text{ 除外边线 } LN) = \triangle IB'H \text{ 除外点 } M \end{aligned}$$

可见,除点 M 外,伸缩三角形 $IB'H$ 内任意点 M' 均有(7.31)式成立。故 M 点处(7.28)式成立, M 点为最优解 x^* 。

以上证明是以所举例题为背景,为说明结论的普遍性还应解释以下几点:

① 以上证明过程表明,结论与伸缩三角形形状无关,也就是说模糊约束条件和目标函数的参数变化时,结论依然成立。

② 当模糊约束条件多于两个,在 FLP 图解法的第一、二步中,由于 LP 问题的唯一解是可行域(凸多边形)的一个顶点,当这个顶点不在 x_1, x_2 轴上时,与我们前面证明的情形一样,一定可以得到一个伸缩三角形,从而可以得到 FLP 的最优解。

③ 若在图解法第一、二步中,LP 的最优解所在可行域的顶点正好在 x_1 (或 x_2)轴上,这种情况下,伸缩三角形为特殊情形,有一条边在 x_1 (或 x_2)轴上,不伸缩,此时图解法第三步只作两条伸缩边夹角的等隶属度分角线,它与 x_1 (或 x_2)轴上的另一条边的交点即为

最优解。如图 7.15 所示, $\triangle ABB'$ 为伸缩三角形, 它的一条边 BB' 在 x_2 轴上, $\angle B'AB$ 的等隶属度分角线交 x_2 轴于 M 点, M 点即最优解。

④ 当模糊约束条件仅一个时, 与③的情形一致。

综上所述, 本文所提出的 FLP 的图解法, 对合理的有唯一解的约束条件有伸缩性的 FLP 问题总是可以得出一个最优解。

图解法除简便直观外, 还有助于利用图形进行分析。当解在伸缩三角形内移动时, 可以直观地看出它对各模糊约束条件和模糊目标隶属度变化的趋势, 从而对最优化问题进行分析。

图解法在模糊约束条件伸缩范围很小时会造成绘图的困难。这种情况下, 可将图形中含伸缩三角形部分局部放大, 如图 7.12 即是图 7.11 的局部放大, 然后再进行作图。可用复印机方便地放大。

第八章 模糊决策

本章所包含的内容主要是模糊统计决策方法(亦称模糊贝叶斯决策方法)和基于排序或择优的模糊决策方法。模糊统计决策是由经典统计决策发展而来,是包含有模糊状态、模糊行动以及模糊信息时的决策方法。模糊统计决策是基于最大效用的决策,即选取期望效用最大的行动为最佳决策。基于排序或择优的模糊决策方法,是把行动方案进行排序,或按某种方法选出最优的方案,也就达到了决策的目的。这种决策方式主要有二元对比、意见集中及综合评判几种方法。

8.1 模糊概率

作为模糊统计决策的基础知识,我们讨论模糊事件的概率问题。在随机现象中,有时所讨论的事件本身是模糊的。例如:掷骰子时,掷出“大点”的概率问题就是一个模糊事件的概率,因为掷出“大点”是一个模糊事件。我们可以把模糊事件一般化地描述为:设 $\Omega = \{\omega_i\}$ 是随机实验 E 的样本空间, ω_i 表示基本事件, Ω 上的任一模糊集合 \tilde{A} 称为随机实验 E 的一个模糊事件。当 Ω 为有限集合时,我们可以从基本事件的概率直接算出模糊事件 \tilde{A} 的概率。

定义 8.1 设样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 为有限集合,则模糊事件 $\tilde{A} \in F(\Omega)$ 的概率定义为

$$P(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}(\omega_i) P(\omega_i) \quad (8.1)$$

式中, $P(\omega_i)$ 为基本事件 ω_i 的概率, $\tilde{A}(\omega_i)$ 为 ω_i 对 \tilde{A} 的隶属度。

当样本空间为无限集时,随机事件往往用随机变量表示。而模糊事件可以用随机变量值域上的模糊集表示。例如干扰信号的幅值可以用随机变量 v 表示,而“幅值在 12 左右”这一事件可以用 v 上的模糊集 \tilde{A} 表示:

$$\tilde{A}(v) = \frac{1}{1 + (v - 12)^2}$$

定义 8.2 设 X 是离散型随机变量,其取值为无限个可列离散数值, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, X 上的模糊集 \tilde{A} 表示模糊事件,该模糊事件的概率定义为:

$$P(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{A}(x_i) P(x_i) \quad (8.2)$$

式中 $P(x_i)$ 是 X 取值 x_i 的概率, $\tilde{A}(x_i)$ 是 x_i 对 \tilde{A} 的隶属度。

定义 8.3 设 X 是连续型随机变量, $f(x)$ 是其概率密度, X 在 R 上连续取值。 R 上的模糊集 \tilde{A} 表示模糊事件,该事件的概率定义为:

$$P(\tilde{A}) = \int_R \tilde{A}(x) f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) f(x) dx \quad (8.3)$$

式中 $A(x)$ 是 A 的隶属函数。

例 8.1 掷骰子中, 求掷出“大点”的模糊概率。样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A 表示“大点”, $A(\omega_i)$ 为:

$$\begin{array}{cccccc} \omega_i: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A(\omega_i): & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 1.0 \end{array}$$

解: 每个基本事件 ω_i 的概率均为 $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$ 由式 8.1, 掷出大点的概率为:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^6 A(\omega_i) P(\omega_i) \\ &= \frac{1}{6} (0.2 + 0.6 + 1.0) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

例 8.2 一批电阻的阻值 R 是随机变量, 均匀分布在 $18\Omega \sim 22\Omega$ 之间, 现从中任取一电阻, 求阻值比 20Ω 大一些的概率。

解: 由于 R 均匀分布在 $18\Omega \sim 22\Omega$ 之间, 显然在此范围内 R 的概率密度 $f(x)$ 为一常数, 设为 f , 那么有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx = f \int_{18}^{22} dx = f(22 - 18) = 4f = 1$$

故 $f = 1/4, 18 \leq x \leq 22$; 其余范围 $f = 0$ 。

设 A 表示模糊事件“比 20Ω 大一些”, 可设 A 的隶属函数为:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-20}{2}, & 20 \leq x \leq 22 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由式 8.3, 可得:

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) f dx = \int_{20}^{22} \frac{x-20}{2} \frac{1}{4} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_{20}^{22} (x-20) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x^2 - 20x \right) \Big|_{20}^{22} = 0.25 \end{aligned}$$

性质 8.1 设 A, B 均为样本空间 Ω 上的模糊事件, 它们具有以下性质:

- (1) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- (2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- (3) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

证明:

$$(1) A \subseteq B \Rightarrow A(x) \leq B(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) P(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) P(x) dx \text{ 即: } P(A) \leq P(B)$$

$$(2) P(\bar{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(x) P(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - A(x)) P(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) d(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) P(x) dx$$

$$= 1 - P(A)$$

$$(3) \quad P(\tilde{A} \cup \tilde{B}) + P(\tilde{A} \cap \tilde{B})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)) P(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)) P(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [(\tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)) + (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x))] P(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)] P(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(x) P(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}(x) P(x) dx$$

$$= P(\tilde{A}) + P(\tilde{B})$$

前面式(8.1)~(8.3)定义的是模糊事件的先验概率,在模糊决策中经常要考虑获得一定的模糊信息后的后验概率。下面我们给出模糊贝叶斯公式。

设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 为基本事件空间, $A \in F(\Omega)$ 是 Ω 上的模糊事件。在有追加信息的情况, 设 $X = \{x_j\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为信息空间, 当可以得到信息源 X 上的条件概率分布 $P(x_j/\omega_i)$, 称 X 为**概率信息源**, 当可以得到 X 上的模糊集合 $\{M_k\} = \{M_1, M_2, \dots, M_l\}$, $M_k \in F(X)$, 称 $\{M_k\}$ 为**模糊信息源**。在获得概率信息源或模糊信息源的情况下, 要求得模糊事件 A 的后验概率, 要使用模糊贝叶斯公式。

在没有得到追加信息的情况下, A 的模糊概率, 由式(8.1)有:

$$P(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}(\omega_i) P(\omega_i)$$

在得到概率信息源的情况下, 由贝叶斯公式有:

$$P(\omega_i/x_j) = \frac{P(x_j/\omega_i)P(\omega_i)}{P(x_j)} \quad (8.4)$$

式中 $P(x_j)$ 可由全概率公式求得:

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^n P(x_j/\omega_i)P(\omega_i)$$

那么模糊事件 A 的后验概率为:

$$P(\tilde{A}/x_j) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}(\omega_i) P(\omega_i/x_j)$$

代入式(8.4)得:

$$P(\tilde{A}/x_j) = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{A}(\omega_i) P(x_j/\omega_i) P(\omega_i)}{P(x_j)} \quad (8.5)$$

在得到模糊信息源的情况下, 有:

$$P(\omega_i/\tilde{M}_k) = \frac{P(\tilde{M}_k/\omega_i)P(\omega_i)}{P(\tilde{M}_k)}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j/\omega_i) P(\omega_i)}{P(\tilde{M}_k)} \quad (8.6)$$

式中 $P(\tilde{M}_k)$ 由下式求得:

$$P(\tilde{M}_k) = \sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j)$$

那么在得到模糊信息源时, \tilde{A} 的后验概率为:

$$P(\tilde{A}/\tilde{M}_k) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}(\omega_i) P(\omega_i/\tilde{M}_k)$$

代入式(8.6)得:

$$P(\tilde{A}/\tilde{M}_k) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{A}(\omega_i) \tilde{M}_k(x_j) P(x_j/\omega_i) P(\omega_i)}{P(\tilde{M}_k)} \quad (8.7)$$

对于以上的模糊事件 \tilde{A} 的先验概率和获得追加的概率信息源和模糊信息源后的后验概率的推导过程, 我们可由图 8.1 作一简单的概括。

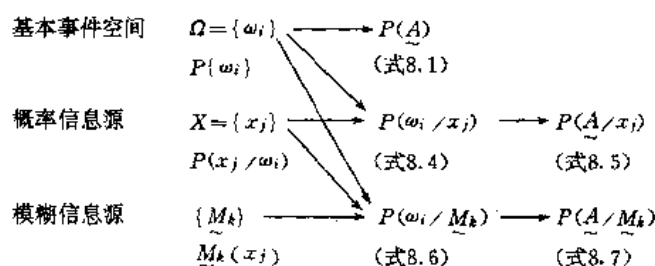


图 8.1 模糊事件概率的推导过程

8.2 经典统计决策

先看一个例子。

例 8.3 某企业根据资料分析和经验判断, 估计企业的家用空调器产品的销路情况有四种可能性:

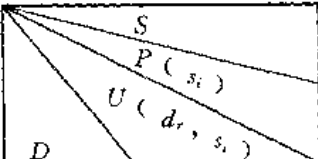
- 销量 > 10 万台/年, 这种状态可能发生的概率为 0.5;
- 销量 5~10 万台/年, 这种状态可能发生的概率为 0.3;
- 销量 1~5 万台/年, 这种状态可能发生的概率为 0.1;
- 销量 < 1 万台/年, 这种状态可能发生的概率为 0.1。

决策者根据企业的实际生产能力、企业其它情况及本地区其它有关工厂的情况以及市场近期和长期的需求趋势, 初步拟定三个可行方案:

- 扩建现有工厂;
- 新建厂;
- 与其它兄弟厂联合生产经营。

在此基础上, 决策者根据不同方案产品的成本费用, 见效周期等情况估计出了各种方案在不同销售状态下的年盈亏值, 如表 8.1 所示。

表 8.1 盈亏值和概率

	年销量 >10 万元	年销量 5~10 万台	年销量 1~5 万台	年销量 <1 万台
	0.5	0.3	0.1	0.1
扩 建	50	25	-25	-45
新 建	70	30	-40	-80
联 营	30	15	-5	-10

那么,决策者应采用哪一种方案才能取得最好的经济效益呢?

这个例子就是经典统计决策的问题。

经典统计决策用 $(S, D, P(s_i), U(d_r, s_i))$ 四元组表示。其中 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 是自然状态的集合,每一个 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是自然界一种状态或者说是实际存在的一种情况。 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$ 是行动的集合或者说是决策的集合。 D 中每个元素 $d_r (r=1, 2, \dots, q)$ 表示决策者制定的一种行动方案。 $P(s_i)$ 表示自然状态 s_i 可能发生的概率,是 s_i 的先验概率分布。 $U(d_r, s_i)$ 是 $D \times S$ 上的评价函数,或称效用函数,它表示当自然状态为 s_i 时,采取行动 d_r 所取得的效果。对上面的例 8.3,即是年盈亏值。统计决策即是在这些前提下确定决策者应该采取的行动方案。

下面我们给出经典统计决策的基本概念和方法。

定义 8.4 统计决策问题 $(S, D, P(s_i), U(d_r, s_i))$, 行动 d_r 的期望效用定义为:

$$U(d_r) = \sum_{i=1}^n U(d_r, s_i) P(s_i), \quad r = 1, 2, \dots, q \quad (8.8)$$

最佳决策 d^* 定义为使期望效用最大的行动,即

$$U(d^*) = \max_r U(d_r) \quad (8.9)$$

在例 8.3 中,期望效用为:

$$\begin{aligned}
 U(d_1) &= \sum_{i=1}^4 U(d_1, s_i) P(s_i) = 50 \times 0.5 + 25 \times 0.3 \\
 &\quad + (-25) \times 0.1 + (-45) \times 0.1 = 25.5
 \end{aligned}$$

同样: $U(d_2) = 32$

$$U(d_3) = 18$$

故: $U(d^*) = U(d_2)$, 最佳决策为 $d^* = d_2 = \text{新建}$ 。

考虑以上决策问题又有追加信息的情况。假定又有一信息源 $X = \{x_j\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 而且条件概率 $P(x_j/s_i)$ 已给出, X 为概率信息源。

如果从信息源 X 得到信息 x_j , 则可由该信息 x_j 由贝叶斯公式计算出后验概率:

$$P(s_i/x_j) = \frac{P(x_j/s_i)P(s_i)}{P(x_j)} \quad (8.10)$$

式中:

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^n P(x_j/s_i)P(s_i) \quad (8.11)$$

于是 s_i 的先验概率变为信息 x_j 下的后验概率 $P(s_i/x_j)$, 决策问题也就相应变为如下定义。

定义 8.5 统计决策问题 $(S, D, P(s_i), U(d_r, s_i))$, 从概率信息源 X 得到信息 x_j 后行动 d_r 的期望效用定义为:

$$U(d_r/x_j) = \sum_{i=1}^n U(d_r, s_i) P(s_i/x_j) \quad (8.12)$$

最佳决策 $d_{x_j}^*$ 定义为:

$$U(d_{x_j}^*/x_j) = \max_r U(d_r/x_j) \quad (8.13)$$

得到概率信息源 X 条件下期望效用 $U(d_x^*)$ 定义为:

$$U(d_x^*) = \sum_{j=1}^m U(d_{x_j}^*/x_j) P(x_j) \quad (8.14)$$

定义 8.5 中, 式(8.14)是有信息源 X 可利用, 但得到什么样的 x_j 尚未可知时的期望效用, 而式 8.13 则是得到 x_j 后的期望效用。

定义 8.6 概率信息源 X 的价值 $V(X)$ 定义为:

$$V(X) = U(d_x^*) - U(d^*) \quad (8.15)$$

我们回到例 8.3, 假设本例有追加概率信息源 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 它表示城市居民购买力的相对增量, 设 $X = \{>10\%, 0 \sim 10\%, <0\%\}$, 并根据以往的数据分析出空调器的销售量的各种情况下城市居民购买力相对增量的条件概率 $P(x_j/s_i)$, 如表 8.2 所示。

表 8.2 $P(x_j/s_i)$

$s_i \backslash x_j$ $P(x_j/s_i)$	x_1 $>10\%$	x_2 $0 \sim 10\%$	x_3 $<0\%$
$s_1: >10$ 万	0.6	0.3	0.1
$s_2: 5 \sim 10$ 万	0.3	0.5	0.2
$s_3: 1 \sim 5$ 万	0.2	0.4	0.4
$s_4: <1$ 万	0.1	0.4	0.5

假如已经由信息源 X 中获得了信息为 x_1 , 即城市居民购买力为 $>10\%$ 的上升趋势, 由式(8.11)有:

$$P(x_1) = \sum_{i=1}^4 P(x_1/s_i) P(s_i) = 0.6 \times 0.5 + 0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.1 + 0.1 \times 0.1 = 0.42$$

$$\begin{aligned} \text{于是: } P(s_1/x_1) &= P(x_1/s_1) P(s_1) / P(x_1) \\ &= 0.6 \times 0.5 / 0.42 = 0.714 \end{aligned}$$

$$\text{同样: } P(s_2/x_1) = 0.212$$

$$P(s_3/x_1) = 0.05$$

$$P(s_4/x_1) = 0.024$$

那么在获得信息 x_1 时的效用由式(8.12)得:

$$\begin{aligned} U(d_1/x_1) &= \sum_{i=1}^4 U(d_1, s_i) P(s_i/x_1) \\ &= 50 \times 0.714 + 25 \times 0.212 + (-25) \times 0.05 + (-45) \times 0.024 \\ &= 38.67 \end{aligned}$$

同样可得: $U(d_2/x_1) = 52.42$

$$U(d_3/x_1) = 24.11$$

因此,由式(8.13)可知最佳决策满足:

$$U(d_{x_1}^*/x_1) = \max_r U(d_r/x_1) = U(d_2/x_1) = 52.42$$

$$d_{x_1}^* = d_2$$

下面我们求在利用概率信息源 X 下的期望效用 $U(d_X^*)$ 。

用与上面同样的方法,我们可以求得:

$$P(x_2) = 0.38$$

$$P(s_1/x_2) = 0.39, P(s_2/x_2) = 0.39, P(s_3/x_2) = 0.11, P(s_4/x_2) = 0.11$$

$$U(d_1/x_2) = 21.55, U(d_2/x_2) = 25.8, U(d_3/x_2) = 15.9$$

$$U(d_{x_2}^*/x_2) = U(d_2/x_2) = 25.8$$

$$P(x_3) = 0.2$$

$$P(s_1/x_3) = 0.25, P(s_2/x_3) = 0.3, P(s_3/x_3) = 0.2, P(s_4/x_3) = 0.25$$

$$U(d_1/x_3) = 3.75, U(d_2/x_3) = -1.5, U(d_3/x_3) = 8.5$$

$$U(d_{x_3}^*/x_3) = U(d_3/x_3) = 8.5$$

所以,由式(8.14)得:

$$\begin{aligned} U(d_X^*) &= \sum_{j=1}^3 U(d_{x_j}^*/x_j) P(x_j) \\ &= 52.42 \times 0.42 + 25.8 \times 0.38 + 8.5 \times 0.2 \\ &= 33.52 \end{aligned}$$

那么,由式(8.15)可得概率信息源 X 的价值为:

$$V(X) = U(d_X^*) - U(d^*) = 33.52 - 32 = 1.52$$

8.3 有模糊信息源的统计决策

上节我们讨论了有追加信息 X 的统计决策问题,如果追加信息是模糊信息,即 X 上的模糊集合,问题就变为有模糊信息源的统计决策问题。设 $M = \{\tilde{M}_k\} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_l\}$, \tilde{M}_k 是 X 上的模糊集合, $\tilde{M}_k \in F(X)$, \tilde{M}_k 称模糊信息, $M = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_l\}$ 叫做模糊信息源。很多情况下,获得 X 上的模糊信息 \tilde{M}_k 要比从 X 中获得信息 x_j 要容易,付出的代价要小,在概率信息源的观测中要求正确地观测到那一个 x_j 发生,而在模糊信息源的观测中,只要求观测大体上那一个 x_j 发生就可以了。

下面我们给出有模糊信息源的统计决策问题的解法。

如果由模糊信息源 M 获得模糊信息 \tilde{M}_k , 我们可用模糊贝叶斯公式求出 \tilde{M}_k 下的条件概率, 由公式(8.6)有:

$$P(s_i/\tilde{M}_k) = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j/s_i) P(s_i)}{P(\tilde{M}_k)} \quad (8.16)$$

式中:
$$P(\tilde{M}_k) = \sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j) \quad (8.17)$$

(8.17)式中 $P(x_j)$ 由式(8.11)给出。

性质 8.2 模糊条件概率 $P(s_i/\tilde{M}_k)$ 有下述性质:

(1) $\sum_{i=1}^n (s_i/\tilde{M}_k) = 1$

(2) 若 \tilde{M}_k 退化为普通信息, 即 $\tilde{M}_k(x_j) = 1$, 而对 X 中其它元素 $x_i \in X, i \neq j$, 均有 $\tilde{M}_k(x_i) = 0$, 则有:

$$\begin{aligned} P(s_i/\tilde{M}_k) &= \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j/s_i) P(s_i)}{\sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j)} \\ &= \frac{P(x_j/s_i) P(s_i)}{P(x_j)} \\ &= \frac{P(s_i/x_j) P(x_j)}{P(x_j)} \\ &= P(s_i/x_j) \end{aligned}$$

(3) 对 $\forall x_j \in X$, 若有 $\tilde{M}_k(x_j) = 0$, 则有:

$$\begin{aligned} P(s_i/\tilde{M}_k) &= \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j/s_i) P(s_i)}{\sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m 0 P(x_j/s_i) P(s_i)}{\sum_{j=1}^m 0 P(x_j)} \\ &= \frac{0 P(s_i) \sum_{j=1}^m P(x_j/s_i)}{0 \sum_{j=1}^m P(x_j)} \\ &= \frac{P(s_i) \times 1}{1} \\ &= P(s_i) \end{aligned}$$

对于模糊信息源 $M = \{\tilde{M}_k | k=1, 2, \dots, l\}, \tilde{M}_k \in F(X), X = \{x_j | j=1, 2, \dots, m\}$ 若对于所有的 j 有:

$$\sum_{k=1}^l \tilde{M}_k(x_j) = 1$$

则 M 称为正交的。以下都假定模糊信息源为正交的。此时 $M = \{\tilde{M}_k | k=1, 2, \dots, l\}$ 是完备的模糊事件组, 有下式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l P(\tilde{M}_k) &= \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^m P(x_j) \sum_{k=1}^l \tilde{M}_k(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^m P(x_j) \\ &= 1 \end{aligned}$$

得到模糊信息 \tilde{M}_k 后, 最佳决策由下述定义求出。

定义 8.7 统计决策问题 $(S, D, P(s_i), U(d_r, s_i))$, 当得到 X 上的模糊信息 \tilde{M}_k 后, 行动 d_r 的期望效用定义为:

$$U(d_r / \tilde{M}_k) = \sum_{i=1}^n U(d_r, s_i) P(s_i / \tilde{M}_k) \quad (8.18)$$

最佳决策 $d_{\tilde{M}_k}^*$ 定义为:

$$U(d_{\tilde{M}_k}^* / \tilde{M}_k) = \max_r U(d_r / \tilde{M}_k) \quad (8.19)$$

定义 8.8 模糊信息源 M 的价值 $V(M)$ 定义为:

$$V(M) = U(d_M^*) - U(d^*) \quad (8.20)$$

式中 $U(d_M^*)$ 为:

$$U(d_M^*) = \sum_{k=1}^l U(d_{\tilde{M}_k}^* / \tilde{M}_k) P(\tilde{M}_k) \quad (8.21)$$

式(8.21)的 $U(d_M^*)$ 为模糊信息源 M 可以利用时的期望效用。 $U(d_M^*)$ 、 $U(d_{\tilde{M}_k}^* / \tilde{M}_k)$ 分别对应概率信息源情况下的式(8.14)和式(8.13)中的 $U(d_X^*)$ 和 $U(d_{x_j}^* / x_j)$ 。

例 8.4 设 $S = \{s_1, s_2\}, D = \{d_1, d_2\}, X = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}, M = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3\}$, 效用函数 $U(d_r, s_i)$ 由表 8.3 给出, 条件概率及模糊信息 \tilde{M}_k 的隶属函数 $\tilde{M}_k(x_j)$ 由表 8.4 给出。
 $P(s_1) = P(s_2) = 0.5$

表 8.3 $U(d_r, s_i)$

$d_r \backslash s_i$	s_1	s_2
	s_1	s_2
d_1	4	-2
d_2	-2	2

表 8.4 $\tilde{M}_k(x_j)$ 和 $P(x_j/s_i)$

\tilde{M}_1	1	1	0.5	0	0	0	0	0
\tilde{M}_2	0	0	0.5	1	1	0.5	0	0
\tilde{M}_3	0	0	0	0	0	0.5	1	1
x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
s_1	0	0.05	0.1	0.1	0.2	0.4	0.1	0.05
s_2	0.05	1	0.4	0.2	0.1	0.1	0.05	0

此问题有如下结果:

(1) 没有信息源的情况:

$$U(d^*)=1$$

(2) 有概率信息源 X 的情况:

$$U(d_X^*)=1.875$$

$$V(X)=U(d_X^*)-U(d^*)=0.875$$

(3) 模糊信息源的情况:

$$U(d_M^*)=1.808$$

$$V(M)=U(d_M^*)-U(d^*)=0.808$$

可见,本例中模糊信息源 M 的价值 $V(M)$ 比概率信息源 X 的价值 $V(X)$ 略小一些。而在概率信息源的观测中,必须准确地观测到哪一个 x_j 发生,而在模糊信息源的观测中只要确定大体上是哪一个 x_j 发生就可以了。正如本例那样,往往有这样的情况,正确观测的价值并不比模糊观测大多少,因此花费较大的观测成本去作准确的观测并不合算,只要作模糊观测就够了。

8.4 模糊统计决策

上一节,我们给统计决策问题引入了模糊信息。这一节,我们将进一步将决策问题模糊化,考虑模糊自然状态及模糊行动方案的情况下的决策问题,即“大体为某一状态时,大体采取什么行动方案”这样的模糊状况下的决策,我们称为模糊统计决策。

现实决策问题中, S 和 D 的元素数往往是很多的,在元素数众多的 $D \times S$ 上正确地分析效用,可能花费较多的费用和时间。可以在 D 和 S 上定义我们感兴趣的表示大体的行动方案的模糊集 \tilde{A}_k 及表示大体的自然状态的模糊集 \tilde{F}_i ,这样就可元素较少的 $\tilde{A}_k \times \tilde{F}_i$ 上分析效用,付出较少的时间和费用,而且往往也就够用了。

定义 8.9 模糊统计决策问题由四元组 (F, A, P, U) 表示。其中 $F = \{\tilde{F}_i\} = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_v\}$ 是一组模糊状态的集合, \tilde{F}_i 是自然状态 $S = \{s_i\} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 上的模糊集,即 $\tilde{F}_i \in F(S)$, $A = \{\tilde{A}_k\} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m\}$ 是一组模糊行动, \tilde{A}_k 是行动 $D = \{d_i\} = \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$ 上的模糊集,即 $\tilde{A}_k \in F(D)$ 。 $U(\tilde{A}_k, \tilde{F}_i)$ 为 $\{\tilde{A}_k\} \times \{\tilde{F}_i\}$ 上的效用函数, P 为 S 上的先验概率 $P(s_i)$ 。并且,假定 $F = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_v\}$ 是正交的。

下面我们讨论不同信息源情况下,模糊统计决策问题的解法。

1. 没有信息源的情况

模糊状态 \tilde{F}_i 的先验概率 $P(\tilde{F}_i)$, 由模糊事件的概率定义:

$$P(\tilde{F}_i) = \sum_{j=1}^n \tilde{F}_i(s_j) P(s_j) \quad (8.22)$$

在没有信息源的情况下,模糊统计决策的解由下述定义给出。

定义 8.10 没有信息源的情况下,模糊行动 \tilde{A}_h 的期望效用 $U(\tilde{A}_h)$ 定义为:

$$U(\tilde{A}_h) = \sum_{i=1}^v U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i) \quad (8.23)$$

最佳模糊行动 \tilde{A}^* 定义为期望效用最大的行动:

$$U(\tilde{A}^*) = \max_h U(\tilde{A}_h) \quad (8.24)$$

2. 有概率信息源 X 的情况

若可由 X 得到信息 x_j 时,由模糊贝叶斯公式(式 8.5)有:

$$P(\tilde{F}_i/x_j) = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{F}_i(s_i) P(x_j/s_i) P(s_i)}{P(x_j)} \quad (8.25)$$

式中:

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^n P(x_j/s_i) P(s_i)$$

那么得到信息 x_j 时,模糊统计决策的解法由下述定义给出。

定义 8.11 由概率信息源获得信息 x_j 时,行动 \tilde{A}_h 的效用为:

$$U(\tilde{A}_h/x_j) = \sum_{i=1}^v U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i/x_j) \quad (8.26)$$

最佳模糊行动 $\tilde{A}_{x_j}^*$ 定义为期望效用最大的行动:

$$U(\tilde{A}_{x_j}^*/x_j) = \max_h U(\tilde{A}_h/x_j) \quad (8.27)$$

概率信息源 X 的价值 $V(X)$ 由下面的定义给出。

定义 8.12 模糊决策问题 (F, A, P, U) , 概率信息源 X 的价值 $V(X)$ 定义为:

$$V(X) = U(\tilde{A}_X^*) - U(\tilde{A}^*) \quad (8.28)$$

式中 $U(\tilde{A}_X^*)$ 为概率信息源 X 的期望效用:

$$U(\tilde{A}_X^*) = \sum_{j=1}^m U(\tilde{A}_{x_j}^*/x_j) P(x_j) \quad (8.29)$$

3. 有概率完全信息 X_∞ 的情况

所谓概率完全信息是指可以得到某个状态 $s_i \in S$ 为真的信息,以 X_∞ 表示。

有概率完全信息 X_∞ , 也就是可以正确地告诉我们哪一个 $s_i \in S$ 为真,即 s_i 肯定会发生,那么 $P(s_i)=1$,而 S 中的其它状态 $s_j, j \neq i$, 则有 $P(s_j)=0$ 。因此,当 s_i 肯定发生时有:

$$\begin{aligned} P(\tilde{F}_i/s_i) &= P(\tilde{F}_i) = \sum_{i=1}^n \tilde{F}_i(s_i) P(s_i) \\ &= \tilde{F}_i(s_i) \end{aligned}$$

定义 8.13 有概率完全信息 X_∞ 时, $s_i \in S$ 为真,模糊行动 \tilde{A}_h 的期望效用为:

$$\begin{aligned}
 U(\tilde{A}_h/s_i) &= \sum_{t=1}^v U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_t) P(\tilde{F}_t/s_i) \\
 &= \sum_{t=1}^v U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_t) \tilde{F}_t(s_i)
 \end{aligned} \quad (8.30)$$

最佳模糊行动 $\tilde{A}_{i_i}^*$ 为期望效用最大的行动:

$$U(\tilde{A}_{i_i}^*/s_i) = \max_h U(\tilde{A}_h/s_i) \quad (8.31)$$

概率完全信息的价值 $V(X_\infty)$ 由下面的定义给出。

定义 8.14 概率完全信息 X_∞ 的价值 $V(X_\infty)$ 定义为:

$$V(X_\infty) = U(\tilde{A}_{X_\infty}^*) - U(\tilde{A}^*) \quad (8.32)$$

式中 $U(\tilde{A}_{X_\infty}^*)$ 为概率完全信息的期望效用; $U(\tilde{A}_{X_\infty}^*)$ 定义为:

$$U(\tilde{A}_{X_\infty}^*) = \sum_{i=1}^n U(\tilde{A}_{S_i}^*/s_i) P(s_i) \quad (8.33)$$

4. 有模糊信息源的情况

考虑由模糊信息源 $M = \{\tilde{M}_k\} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_l\}$ 的情况, $\tilde{M}_k \in F(X)$, $X = \{x_j\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 。

若由模糊信息源 M 得到模糊信息 \tilde{M}_k , 由 8.1 节的式(8.7), 模糊状态 \tilde{F}_t 的后验概率由模糊贝叶斯公式有:

$$P(\tilde{F}_t/\tilde{M}_k) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{F}_t(s_i) \tilde{M}_k(x_j) P(x_j/s_i) P(s_i)}{P(\tilde{M}_k)} \quad (8.34)$$

式中:

$$P(\tilde{M}_k) = \sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j)$$

模糊信息源 \tilde{M}_k 给出时的最佳模糊行动定义如下。

定义 8.15 模糊统计决策 (F, A, P, U) , 若由模糊信息源 M 给出模糊信息 \tilde{M}_k , 则模糊行动 \tilde{A}_k 的期望效用为:

$$U(\tilde{A}_k/\tilde{M}_k) = \sum_{i=1}^v U(\tilde{A}_k, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i/\tilde{M}_k) \quad (8.35)$$

最佳模糊行动 $\tilde{A}_{M_k}^*$ 由下式给出:

$$U(\tilde{A}_{M_k}^*/\tilde{M}_k) = \max_h U(\tilde{A}_h/\tilde{M}_k) \quad (8.36)$$

定义 8.16 模糊信息源 M 的价值 $V(M)$ 定义为:

$$V(M) = U(\tilde{A}_M^*) - U(\tilde{A}^*) \quad (8.37)$$

式中 $U(\tilde{A}_M^*)$ 定义为模糊信息源 M 的期望效用:

$$U(\tilde{A}_M^*) = \sum_{k=1}^l U(\tilde{A}_{M_k}^*/\tilde{M}_k) P(\tilde{M}_k) \quad (8.38)$$

式中:

$$P(\tilde{M}_k) = \sum_{j=1}^m \tilde{M}_k(x_j) P(x_j)$$

5. 有模糊完全信息源 M_∞ 的情况

所谓模糊完全信息 M_∞ 是指这样的信息, 它能使我们知道那个模糊信息 F_i 发生, 即告诉我们某个模糊状态 \tilde{F}_i 有 $P(\tilde{F}_i)=1$ 。

定义 8.17 模糊统计决策问题 (F, A, P, U) , 当有模糊完全信息 M_∞ , 对某一模糊状态 \tilde{F}_i 有 $P(\tilde{F}_i)=1$, 则模糊行动 \tilde{A}_k 的期望效用为:

$$U(\tilde{A}_k/\tilde{F}_i) = U(\tilde{A}_k, \tilde{F}_i) \quad (8.39)$$

最佳模糊行动 $\tilde{A}_{F_i}^*$ 为:

$$U(\tilde{A}_{F_i}^*/\tilde{F}_i) = \max_h U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) \quad (8.40)$$

定义 8.18 模糊完全信息 M_∞ 的价值定义为:

$$V(M_\infty) = U(\tilde{A}_{M_\infty}^*) - U(\tilde{A}^*) \quad (8.41)$$

式中 $U(\tilde{A}_{M_\infty}^*)$ 为模糊完全信息 M_∞ 的期望效用:

$$U(\tilde{A}_{M_\infty}^*) = \sum_{i=1}^v U(\tilde{A}_{F_i}^*/\tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i) \quad (8.42)$$

$P(\tilde{F}_i)$ 由 (8.22) 式给出。

定理 8.1 对于概率信息和模糊信息的价值有下式成立:

$$V(M_\infty) \geq V(X_\infty) \geq V(X) \geq V(M) \geq 0 \quad (8.43)$$

证明:

先证 $V(M_\infty) \geq V(X_\infty)$:

$$\begin{aligned} & U(\tilde{A}_{X_\infty}^*) \\ &= \sum_i U(\tilde{A}_{F_i}^*/\tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i) \quad (\text{见式 8.33}) \\ &= \sum_i [\max_h \sum_t U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_t) \tilde{F}_t(s_i)] P(\tilde{F}_i) \quad (\text{见式 8.30, 8.31}) \\ &\leq \sum_i [\sum_t \max_h U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_t) \tilde{F}_t(s_i)] P(\tilde{F}_i) \\ &= \sum_i \sum_t \max_h U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_t) \tilde{F}_t(s_i) P(\tilde{F}_i) \\ &= \sum_i \max_h U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) [\sum_t \tilde{F}_t(s_i) P(\tilde{F}_i)] \\ &= \sum_i \max_h U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i) \quad (\text{模糊概率式 8.1}) \\ &= U(\tilde{A}_{M_\infty}^*) \quad (\text{见式 8.42}) \end{aligned}$$

故有:

$$V(M_\infty) \geq V(X_\infty) \quad (\text{见式 8.28, 8.32})$$

再证 $V(X) \geq V(M)$:

$$\begin{aligned} & U(\tilde{A}_M^*) \\ &= \sum_k U(\tilde{A}_{M_k}^*/\tilde{M}_k) P(\tilde{M}_k) \quad (\text{见式 8.38}) \\ &= \sum_k [\max_h \sum_t U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_t) P(\tilde{F}_t/\tilde{M}_k)] P(\tilde{M}_k) \quad (\text{见式 8.35, 8.36}) \\ &= \sum_k \max_h \sum_t U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_t) [P(\tilde{F}_t/\tilde{M}_k) P(\tilde{M}_k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) [P(\tilde{M}_k / \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i)] \quad (\text{模糊贝叶斯公式}) \\
&= \sum_k \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) [\sum_j P(x_j / \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i) \tilde{M}_k(x_j)] \\
&= \sum_k \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) [\sum_j P(\tilde{F}_i / x_j) P(x_j) \tilde{M}_k(x_j)] \\
&= \sum_k \max_h \sum_i \sum_j U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i / x_j) P(x_j) \tilde{M}_k(x_j) \\
&= \sum_k \max_h \sum_j \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i / x_j) P(x_j) \tilde{M}_k(x_j) \\
&\leq \sum_k \sum_j \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i / x_j) P(x_j) \tilde{M}_k(x_j) \\
&= \sum_j \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i / x_j) P(x_j) \sum_k \tilde{M}_k(x_j) \\
&= \sum_j [\max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i / x_j)] P(x_j) \quad (M \text{ 正交}) \\
&= \sum_j U(\tilde{A}_{x_j}^* / x_j) P(x_j) \quad (\text{见式 8.26, 8.27}) \\
&= U(\tilde{A}_X^*) \quad (\text{见式 8.29})
\end{aligned}$$

故:

$$V(X) \geq V(M) \quad (\text{见式 8.28, 8.37})$$

再证 $V(X_\infty) \geq V(X)$:

$$\begin{aligned}
&U(\tilde{A}_X^*) \\
&= \sum_j (\tilde{A}_{x_j}^* / x_j) P(x_j) \quad (\text{见式 8.29}) \\
&= \sum_j \max_h [\sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) P(\tilde{F}_i / x_j)] P(x_j) \quad (\text{见式 8.26, 8.27}) \\
&= \sum_j \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) [\sum_s P(s_i / x_j) \tilde{F}_i(s_i)] P(x_j) \\
&= \sum_j \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) [\sum_s P(s_i / x_j) P(x_j) \tilde{F}_i(s_i)] \\
&= \sum_j \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) [\sum_s P(x_j / s_i) P(s_i) \tilde{F}_i(s_i)] \quad (\text{贝叶斯公式}) \\
&= \sum_j \max_h \sum_i \sum_s U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) \tilde{F}_i(s_i) P(s_i) P(x_j / s_i) \\
&\leq \sum_j \sum_i \max_h \sum_s U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) \tilde{F}_i(s_i) P(s_i) P(x_j / s_i) \\
&= \sum_i \sum_j P(x_j / s_i) \max_h \sum_s U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) \tilde{F}_i(s_i) P(s_i) \\
&= \sum_i [\max_h \sum_s U(\tilde{A}_h, \tilde{F}_i) \tilde{F}_i(s_i)] P(s_i) \\
&= \sum_i U(\tilde{A}_{s_i}^* / s_i) P(s_i) \quad (\text{见式 8.30, 8.31}) \\
&= U(\tilde{A}_{X_\infty}^*) \quad (\text{式 8.33})
\end{aligned}$$

故:

$$V(X_\infty) \geq V(X) \quad (\text{见式 8.28, 8.32})$$

最后证 $V(M) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& U(\tilde{A}_M^*) \\
&= \sum_k U(\tilde{A}_{M_k}^*/\tilde{M}_k)P(\tilde{M}_k) \quad (\text{见式 8.38}) \\
&= \sum_k \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h^*, \tilde{F}_i)P(\tilde{F}_i/\tilde{M}_k)P(\tilde{M}_k) \quad (\text{见式 8.35, 8.36}) \\
&\geq \max_h \sum_k \sum_i U(\tilde{A}_h^*, \tilde{F}_i)P(\tilde{F}_i/\tilde{M}_k)P(\tilde{M}_k) \\
&= \max_h \sum_i \sum_k U(\tilde{A}_h^*, \tilde{F}_i)P(\tilde{M}_k/\tilde{F}_i)P(\tilde{F}_i) \\
&= \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h^*, \tilde{F}_i)P(\tilde{F}_i) \sum_k P(\tilde{M}_k/\tilde{F}_i) \quad (8.44)
\end{aligned}$$

下面我们看式 8.44 中的 $\sum_k P(\tilde{M}_k/\tilde{F}_i)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_k P(\tilde{M}_k/\tilde{F}_i) \\
&= \sum_k \sum_j P(x_j/\tilde{F}_i) \tilde{M}_k(x_j) \\
&= \sum_j P(x_j/\tilde{F}_i) \sum_k \tilde{M}_k(x_j) \\
&= \sum_j P(x_j/\tilde{F}_i) \quad (M \text{ 正交}) \\
&= \sum_j P(\tilde{F}_i/x_j)P(x_j)/P(\tilde{F}_i) \quad (\text{模糊贝叶斯公式}) \\
&= \sum_j \sum_i P(s_i/x_j)P(x_j)\tilde{F}_i(s_i)/P(\tilde{F}_i) \\
&= \sum_j \sum_i P(x_j/s_i)P(s_i)\tilde{F}_i(s_i)/P(\tilde{F}_i) \\
&= \sum_i \tilde{F}_i(s_i)P(s_i) \sum_j P(x_j/s_i)/P(\tilde{F}_i) \\
&= \sum_i \tilde{F}_i(s_i)P(s_i)/P(\tilde{F}_i) \\
&= 1
\end{aligned}$$

因此(8.44)式变为:

$$\begin{aligned}
& U(\tilde{A}_M^*) \\
&\geq \max_h \sum_i U(\tilde{A}_h^*, \tilde{F}_i)P(\tilde{F}_i) \\
&= U(\tilde{A}^*) \quad (\text{见式 8.23})
\end{aligned}$$

故:

$$V(M) \geq 0 \quad (\text{见式 8.37})$$

定理 8.1 证毕。

例 8.5 设某种商品明年的销路为模糊状态 $\tilde{F} = \{\tilde{F}_i\} = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2\}$, \tilde{F}_1 = 畅销, \tilde{F}_2 = 不畅销。今年应该采用的行动方案 $\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$, \tilde{A}_1 = 加强商品广告, \tilde{A}_2 = 加强商品研究, 是两个模糊行动。模糊行动的效用如表 8.5 所示。这是从全局立场出发作出的粗略假定。设 $\tilde{F}_i \in (F(S), S = \{s_i\} = \{800, 900, 1\,000, \dots, 1\,700\}$, 每隔 100 取 1 个元素, 先验概率 $P(s_i)$ 已知, $P(s_i)$ 及 $\tilde{F}_i(s_i)$ 如表 8.6 所示:

表 8.5 $U(\tilde{A}_k, \tilde{F}_i)$

$\tilde{A}_k \backslash \tilde{F}_i$	\tilde{F}_1	\tilde{F}_2
\tilde{A}_1	800	-300
\tilde{A}_2	500	200

表 8.6 S 上的隶属函数 $\tilde{F}_i(s_i)$ 和先验概率分布 $P(s_i)$

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
$\tilde{F}_1(s_i)$	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1	1
$\tilde{F}_2(s_i)$	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0	0
$P(s_i)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05

由表 8.6 可见, $F = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2\}$ 是正交的, 即 $\sum_{i=1}^2 \tilde{F}_i(s_i) = 1$ 。另外取起到先行指标作用的今年商品的销售信息 X 作为信息源, $X = \{x_j\} = \{500, 600, \dots, 1800\}$, 如表 8.7 所示, 并可分析出条件概率 $P(x_j/s_i)$, 我们可以从今年销售量(某一个 x_j) 入手进行统计决策, 如果从这一信息的准确数字入手有困难, 可以从模糊销售信息 $M = \{\tilde{M}_k\} = \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3\}$ 入手, \tilde{M}_1 = 畅销, \tilde{M}_2 = 一般, \tilde{M}_3 = 滞销, 表 8.8 给出了 \tilde{M}_k 的隶属函数。

表 8.7 条件概率 $P(x_j/s_i)$ 值

$s_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
s_1	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s_2	0	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
\vdots														
s_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

表 8.8 模糊事件 \tilde{M}_k 的隶属函数 $\tilde{M}_k(x_j)$

x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
$\tilde{M}_1(x_j)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1
$\tilde{M}_2(x_j)$	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0
$\tilde{M}_3(x_j)$	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0

由表 8.8 可见, M 满足正交条件, 即 $\sum_{k=1}^3 \tilde{M}_k(x_j) = 1, j = 1, 2, \dots, 14$ 。

根据以上数据我们可以根据式(8.25)、式(8.34)计算出 $P(\tilde{F}_i/x_j)$, $P(x_j)$ 和 $P(\tilde{F}_i/\tilde{M}_k)$, 如表 8.9、表 8.10 所示。

表 8.9 模糊条件概率 $P(F_i/x_j)$ 及概率分布值 $P(x_j)$ 的值

x_j	$P(F_1/x_j)$	$P(F_2/x_j)$	$P(x_j)$
x_1	0	1	0.005
x_2	0	1	0.015
x_3	0	1	0.040
x_4	0.034	0.966	0.060
x_5	0.126	0.874	0.095
x_6	0.288	0.712	0.125
x_7	0.424	0.576	0.160
x_8	0.576	0.424	0.160
x_9	0.712	0.288	0.125
x_{10}	0.874	0.126	0.095
x_{11}	0.966	0.034	0.060
x_{12}	1	0	0.040
x_{13}	1	0	0.015
x_{14}	1	0	0.005

表 8.10 模糊条件概率 $P(F_i/M_k)$ 的值

M_k	M_1	M_2	M_3
$P(F_1/M_k)$	0.913	0.5	0.087
$P(F_2/M_k)$	0.087	0.5	0.913

还可以计算出 $P(M_k)$ 值,如下:

$$P(M_1) = 0.151, \quad P(M_2) = 0.698, \quad P(M_3) = 0.151$$

可见 $\sum_{k=1}^3 P(M_k) = 1$, 满足正交性质。 $P(F_i)$ 计算得:

$$P(F_1) = \sum_{i=1}^{10} F_1(s_i) P(s_i) = 0.5$$

$$P(F_2) = 0.5$$

(1) 在没有信息源的情况下,由式(8.23)和式(8.24)有: $U(A_1) = 250, U(A_2) = 350$,所以: $U(A^*) = 350$,最佳模糊行动 $A^* = A_2 = 350$ 。

(2) 在有概率信息源 X 时,根据式(8.26)和式(8.27)计算出 $U(A_1/x_j), U(A_2/x_j), U(A_1^*/x_j)$ 和 A_2^* 如表 8.11 所示。

表 8.11 $U(A_1/x_j), U(A_2/x_j)$ 和 A_2^*

	$U(A_1/x_j)$	$U(A_2/x_j)$	$U(A_1^*/x_j)$	A_2^*
x_1	-300	200	200	A_2
x_2	-300	200	200	A_2
x_3	-300	200	200	A_2
x_4	-262.6	210.2	210.2	A_2
x_5	-161.4	237.8	237.8	A_2

续表

	$U(\tilde{A}_1/x_j)$	$U(\tilde{A}_2/x_j)$	$U(\tilde{A}_i^*/x_j)$	\tilde{A}_i^*
x_6	16.8	268.4	285.4	\tilde{A}_2
x_7	166.4	327.2	327.2	\tilde{A}_2
x_8	333.6	372.8	372.8	\tilde{A}_2
x_9	483.2	413.6	483.2	\tilde{A}_1
x_{10}	661.4	432.2	661.4	\tilde{A}_1
x_{11}	762.6	489.8	762.6	\tilde{A}_1
x_{12}	800	500	800	\tilde{A}_1
x_{13}	800	500	800	\tilde{A}_1
x_{14}	800	500	800	\tilde{A}_1

由公式(8.29),得:

$$U(\tilde{A}_X^*) = 412$$

由式(8.28),有:

$$V(X) = 412 - 350 = 62$$

(3) 有概率完全信息时,由式(8.30)和式(8.31)计算得 $U(\tilde{A}_k/s_i)$, $U(\tilde{A}_{s_i}^*/s_i)$, $\tilde{A}_{s_i}^*$ 如表 8.12 所示。

表 8.12 $U(\tilde{A}_k/s_i)$, $U(\tilde{A}_{s_i}^*/s_i)$, $\tilde{A}_{s_i}^*$

	$U(\tilde{A}_1/s_i)$	$U(\tilde{A}_2/s_i)$	$U(\tilde{A}_{s_i}^*/s_i)$	$\tilde{A}_{s_i}^*$
s_1	-300	200	200	\tilde{A}_2
s_2	-300	200	200	\tilde{A}_2
s_3	-100	200	200	\tilde{A}_2
s_4	-80	260	260	\tilde{A}_2
s_5	140	320	320	\tilde{A}_2
s_6	360	380	380	\tilde{A}_2
s_7	580	440	580	\tilde{A}_1
s_8	800	500	800	\tilde{A}_1
s_9	800	500	800	\tilde{A}_1
s_{10}	800	500	800	\tilde{A}_1

由式(8.33)得:

$$U(\tilde{A}_{X_\infty}^*) = 420$$

由式(8.32)有:

$$V(X_\infty) = 420 - 350 = 70$$

(4) 有模糊信息源的情况,由式(8.35)和(8.36)可计算出 $U(\tilde{A}_k/\tilde{M}_k)$, $U(\tilde{A}_{\tilde{M}_k}^*/\tilde{M}_k)$ 和

$A_{M_i}^*$, 如表 8.13 所示。

表 8.13 $U(A_k/\tilde{M}_k), U(A_{M_k}^*/\tilde{M}_k), A_{M_k}^*$

	$U(A_1/\tilde{M}_k)$	$U(A_2/\tilde{M}_k)$	$U(A_{M_k}^*/\tilde{M}_k)$	$A_{M_k}^*$
\tilde{M}_1	704.3	473.9	704.3	A_1
\tilde{M}_2	250	350	350	A_2
\tilde{M}_3	204.3	226.1	226.1	A_2

由式(8.38)计算得出:

$$U(A_M^*) = 384.8$$

由式(8.37)得:

$$V(M) = 384.8 - 350 = 34.8$$

(5) 有模糊完全信息源的情况, 由式(8.39)和式(8.40)可计算出 $U(A_k/\tilde{F}_i), U(A_{F_i}^*/\tilde{F}_i)$ 及 $A_{F_i}^*$, 如表 8.14 所示。

表 8.14 $U(A_k/\tilde{F}_i), U(A_{F_i}^*/\tilde{F}_i), A_{F_i}^*$

	$U(A_1/\tilde{F}_i)$	$U(A_2/\tilde{F}_i)$	$U(A_{F_i}^*/\tilde{F}_i)$	$A_{F_i}^*$
\tilde{F}_1	800	500	800	A_1
\tilde{F}_2	-300	200	200	A_2

由式(8.42)和式(8.41)得:

$$U(A_{M_\infty}^*) = 500$$

$$V(M_\infty) = 500 - 350 = 150$$

我们把各种信息源情况下的期望效用和价值总结于表 8.15。

表 8.15 各种信息时的期望效用和价值

信 息	期望效用	信息价值
无信息	350	/
概率信息 X	412	62
概率完全信息 X_∞	420	70
模糊信息 M	384.8	34.8
模糊完全信息 M_∞	500	150

表 8.15 给出本例的信息价值, 满足式(8.43), 即:

$$V(M_\infty) \geq V(X_\infty) \geq V(X) \geq V(M) \geq 0$$

8.5 二元对比排序

人们对事物的认识和评价常常是从比较开始,而事物之间的两两对比是最基本的比较。

“工程方案一比方案二更切实可行”。工程方案一与方案二相比,比较哪个方案对“切实可行”的隶属度高,这称为二元对比。

在精确概念中,二元对比所确定的顺序,满足传递性,因而由二元对比的结果就可以确定整体的顺序。 $9 \geq 6, 6 \geq 3, 3 \geq 1$,就可以确定 $9 \geq 6 \geq 3 \geq 1$ 这个整体次序。而模糊概念中,二元对比所确定的顺序则不满足传递性,可能出现循环的状况。工程方案一比方案二似乎更切实可行,方案二比方案三似乎更切实可行,而方案一与方案三比较时,可能又觉得方案三似乎又比方案一切实可行,这是模糊次序观念的一种特征。那么,怎样在二元对比的基础上确定整体的次序呢?有下面几种方法。

1. 择优比较法

择优比较法要求在每次二元对比中,明确地在对比双方中择优,而在决策群体的每个个体进行的二元对比的基础上,统计出每个比较元素为优的总次数,以此为依据排定整体次序。

设有 n 个元素 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 进行排序。决策群体为: $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, 择优比较法的步骤是:

首先,每个决策者 $d_k, k=1, 2, \dots, m$, 对 n 个比较元素进行二元对比,每次明确指出比较双方的优者。

因为有 n 个元素进行比较,因此每个决策个体 d_k , 需进行 $C_k^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 次二元对比,才能将 n 个元素进行一轮二元对比。而且每个决策个体也可以进行不止一轮的二元对比,比如 2 轮,这样当他认为 n 个元素中某两个优的程度相同时,可以在第一轮比较中选择某一个为优,而在第二轮比较中选择另一个为优。

然后,统计每个元素 $u_i, i=1, 2, \dots, n$ 为优的总次数 N_i , 按 N_i 由大至小的顺序重排列 $\{u_i\}$, 即为 n 个元素的整体次序。

设决策个体 d_k 在第 l 轮二元对比中,记 u_i 对 u_j 的择优比较结果为 $C_k^l(i, j)$, 有:

$$C_k^l(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } u_i \text{ 优于 } u_j \\ 0, & \text{当 } u_i \text{ 不优于 } u_j \end{cases}$$

式中: $i, j=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, m$ 且 $i \neq j$ 。假定选 $l=1, 2$ 。显然, u_i 和 u_j 的一次比较产生两个结果,且有:

$$C_k^l(i, j) + C_k^l(j, i) = 1$$

那么:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 C_k^l(i, j) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 C_k^l(j, i) = 2m$$

$2m$ 为 u_i 和 u_j 比较的总次数。

元素 u_i 在全部对比中为优的总次数为:

$$N_i = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n C_k(i, j), \quad i \neq j$$

显然, $\sum_{i=1}^n N_i$ 等于全部二元对比中比较的总次数, 即:

$$\sum_{i=1}^n N_i = 2m \frac{1}{2} n(n-1) = mn(n-1) \quad (8.45)$$

例 8.6 由 50 位专家对某工程的四个设计方案 $u_1 \sim u_4$ 进行可行性二元对比择优排序, 先进行两轮比较, 结果统计如下:

	u_1	u_2	u_3	u_4	N_i
u_1	/	32	40	55	127
u_2	68	/	58	35	161
u_3	60	42	/	30	132
u_4	45	65	70	/	180

可见, 方案 u_1, u_2, u_3, u_4 的可行性排序结果为: u_4, u_2, u_3, u_1 。

由以上结果不难计算验证式 8.45 为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n N_i &= mn(n-1) \\ &= 50 \times 4 \times 3 = 127 + 161 + 132 + 180 = 600 \end{aligned}$$

2. 优先关系定序法

设有 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ n 个元素, 按着某种特性排一优劣次序。

优先关系定序法先在 n 个元素之间建立一种优先关系, 以 $C(i, j)$ 表示 u_i 与 u_j 二元对比时 u_i 比 u_j 优越的成分, 或称 u_i 对 u_j 的优先选择比, 要求:

$$\begin{aligned} 0 &\leq C(i, j) \leq 1 \\ C(i, i) &= 0 \\ C(i, j) + C(j, i) &= 1 \end{aligned} \quad (8.46)$$

式 8.46 表示, 两个元素对比, 可能各有所长, 把一方优于另一方之处合在一起算做优越成分的总量计为 1, 故有 $C(i, j) + C(j, i) = 1$ 。各自与自己比都没有长处, 故取 $C(i, i) = 0$ 。当 u_i 比 u_j 只有长处而 u_j 比 u_i 没有任何长处时有 $C(i, j) = 1$ 而 $C(j, i) = 0$, 而当 u_i 与 u_j 相比半斤八两不分伯仲时 $C(i, j) = 0.5 = C(j, i)$ 。于是得到优先关系矩阵 C , C 是一个模糊矩阵:

$$C = [C(i, j)]_{n \times n}$$

选择阈值 $\lambda \in [0, 1]$, 取 C 的截矩阵 C_λ :

$$C_\lambda = [C_\lambda(i, j)]$$

其中:

$$C_\lambda(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } C(i, j) \geq \lambda \\ 0, & \text{当 } C(i, j) < \lambda \end{cases}$$

使 λ 由 1 逐步减小, 当 λ 降至 λ_1 , 首次得到 C_{λ_1} , 其第 i_1 行元素除主对角线元素之外, 全部为 1, 则 u_{i_1} 为第 1 优越元素。

在 C 中除去第 1 优越元素, 即除出第 i_1 行和第 i_1 列, 得到新的优先关系矩阵, 再用同样方法得到第 2 优越元素 u_{i_2} , ……如此递推下去, 直至将全体元素排出优劣次序, 即:

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}$$

例 8.7 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, 优先关系矩阵为:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

令 λ 由大到小依次取 C_λ , 有:

$$C_{0.9} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{0.7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{0.6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{0.4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

当 λ 降至 0.4 时第 1 次出现第 3 行元素除对角线元素外全为 1。表明 u_3 对其它元素的优越成分均超过 0.4, 因此 u_3 作为第 1 优越元素。

除去 u_3 , 得优先关系矩阵:

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

按同样方法有:

$$C_{0.9}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故 u_1 为第 2 优越元素, 因此最后排序为: u_3, u_1, u_2 。

3. 相对比较法

设有 x, y, \dots 等元素需按某种特性排序, 相对比较法首先在二元对比中建立二元相对比较级, 然后再经一定算法转化为总体排序。

所谓二元相对比较级指的是, 对给定的一对元素 (x, y) , 建立数对 $(f_y(x), f_x(y))$, 满足:

$$0 \leq f_y(x) \leq 1$$

$$0 \leq f_x(y) \leq 1$$

$(f_y(x), f_x(y))$ 的意义为: 在 x 与 y 的二元对比中, 若 x 具有某种特性的程度定为 $f_y(x)$ 的话, y 具有该特性的程度应为 $f_x(y)$ 。此处, $f_y(x)$ 和 $f_x(y)$ 不是具有该特性的绝对度量, 而是表示相对性, $f_x(y)$ 是相对于 $f_y(x)$ 而定出的。

由二元相对比较级转换为排序规则, 方法如下。

记:
$$f(x/y) = \frac{f_y(x)}{\max(f_x(y), f_y(x))}$$

显然:
$$f(x/y) = \begin{cases} f_y(x)/f_x(y), & \text{当 } f_y(x) \leq f_x(y) \\ 1, & \text{当 } f_y(x) > f_x(y) \end{cases}$$

并令 $f(x/x) = 1$, 以 $f(x/y)$ 为元素作出矩阵, 称相及矩阵。将相及矩阵的每一行取最小值, 按所得的最小值由大到小排序, 即是比较排序的诸元素的优劣次序。

例 8.8 x, y, z 表示三种型号的汽车, 按着“市场潜力大”来排序。

先建立二元相对比较级如下:

$$(f_y(x), f_x(y)) = (0.9, 0.5)$$

$$(f_z(y), f_y(z)) = (0.4, 0.7)$$

$$(f_z(z), f_z(x)) = (0.6, 0.7)$$

由二元相对比较级建立相及矩阵, 且每行取小:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & x & y & z & \min \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5/9 & 1 & 4/7 \\ 6/7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 5/9 \\ 6/7 \end{matrix}$$

可见 x, y, z 三种型号的汽车市场潜力大的排序为: x, z, y 。

8.6 意见集中

意见集中是处理排序的一种方法, 决策群体 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ 要对集合 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 的元素进行排序。 D 中每个个体都要为 U 中的 n 个元素按某种特性排出一个优劣次序, 称为一个意见, 于是产生 m 个意见。如何将个体的 m 个意见集中为一个合理的群体决策意见, 也就是如何将 m 个次序综合为一个合理的次序, 这就是意见集中要解决的问题。

1. 评分法

设要排序的元素集为 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 决策群体为 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, L_j 是 U 中的一个意见, 令 $u_i \in U$, $B_j(u_i)$ 表示在 L_j 中次序在 u_i 之后的元素个数。对于 m 个个体的意见: L_1, L_2, \dots, L_m , u_i 之后元素个数的总和为:

$$B(u_i) = \sum_{j=1}^m B_j(u_i)$$

称 $B(u_i)$ 为元素 u_i 的 Borda 数, U 中的元素可以按各元素 Borda 数的大小排成一个次序。

若 u_i 在 L_j 中是第一位, 则 $B_j(u_i) = n-1$; 若是第二位, 则 $B_j(u_i) = n-2$; \dots ; 若是第 k 位, 则 $B_j(u_i) = n-k$ 。因此 $B_j(u_i)$ 可以看成 u_i 在 L_j 中的得分。 $B(u_i)$ 就是 u_i 在各个次序

L_1, L_2, \dots, L_m 中的总得分。评分法就是按各元素的总分大小排出群体的决策次序。这种方法简便易行。

例 8.9 设 $U = \{a, b, c, d\}$, 由四个专家对 U 提出四种意见:

$$\begin{array}{ll} L_1: adbc & L_2: dacb \\ L_3: dbac & L_4: bdac \end{array}$$

那么有:

$$B_1(a)=3, B_2(a)=2, B_3(a)=1, B_4(a)=1 \text{ 故 } B(a)=7.$$

同理:

$$B(b)=6, B(c)=1, B(d)=10$$

于是意见集中的结果 L 为: $dabc$ 。

2. 最小距离法

设 (u_i, u_j) 是 U 中的一对元素, $i \neq j$, L_1, L_2 是 U 的两个意见, 定义元素对 (u_i, u_j) 在意见 L_1, L_2 中的距离 $\delta(u_i, u_j)$:

$$\delta(u_i, u_j) = \begin{cases} 0, & \text{当 } u_i, u_j \text{ 的顺序在 } L_1 \text{ 和 } L_2 \text{ 中相同} \\ 1, & \text{当 } u_i, u_j \text{ 的顺序在 } L_1 \text{ 和 } L_2 \text{ 中不同} \end{cases}$$

在此基础上定义 L_1, L_2 的距离 $d(L_1, L_2)$ 为 U 中所有元素对的距离之和:

$$d(L_1, L_2) = \sum_{\substack{u_i, u_j \in U \times U \\ (i \neq j)}} \delta(u_i, u_j)$$

设共有 m 个意见 L_1, L_2, \dots, L_m , 意见集中后的意见为 L , 要求 L 与 L_1, L_2, \dots, L_m 的距离和最小。即 $\sum_{j=1}^m d(L, L_j)$ 最小, 则 L 为群体决策。

在例 8.9 中, 评分后的意见 L 为 $dabc$, 有:

$$\begin{aligned} d(L, L_1) &= \delta(a, b) + \delta(a, c) + \delta(a, d) + \delta(b, c) + \delta(b, d) + \delta(c, d) \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

同样: $d(L, L_2) = 1$

$$d(L, L_3) = 1$$

$$d(L, L_4) = 2$$

故有:

$$d(L, L_1) + d(L, L_2) + d(L, L_3) + d(L, L_4) = 5$$

经过枚举试验, 距离和为 5 是最小的, 因此 $dabc$ 可以作为集中后的排序。

8.7 模糊综合评判

综合评判(或称综合评价)是对具有多种属性的事物, 或者说其总体优劣受多种因素影响的事物, 作出一个能合理地综合这些属性或因素的总体评判。例如, 评价一个科技发展规划, 涉及到该规划是否符合国家总的科技发展战略目标, 规划制定的科技发展领域是

否解决国民经济发展需要解决的重大科技问题,规划制定的科技发展目标是否促进赶超世界科技先进水平,规划可能实现的经济效益和投资,规划实施的可行性等等。因此必须对这些诸多因素进行综合,才能做出合理的评价,在多数情况下,评判涉及模糊因素,用模糊数学的方法进行评判是一条可行的也是一条较好的途径。

8.7.1 模糊综合评判的数学模型

模糊综合评判涉及到影响评判对象的多种因素,设评判因素集为 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 。

评判结果视评判工作具体要求,可能用若干不同的等级、评语、数字来表示。设有 m 个不同的评判等级,组成评价集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 。

一般来讲, n 个评判因素 u_1, u_2, \dots, u_n , 其重要程度有所不同。为此,给每个因素 u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 赋予一个权重 a_i , 代表 u_i 在总体评判中的重要程度,且要求诸 a_i 满足归一条件: $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。各评判因素的权重分配 $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 可以看成是论域 U 上的模糊集, $\tilde{A} \in F(U)$ 。

综合评判的结果,一般不能绝对地肯定或绝对地否定它属于 m 种评价等级中的哪一级,而是表示为评价集 V 上的模糊集 $\tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in F(V)$ 。第 j 个等级 v_j 对 \tilde{B} 的隶属度 $\tilde{B}(v_j)$ 可以看作是 v_j 在综合评判结果中所占的份额。

综合评判涉及到多个评判因素,难于直接得出综合评判结果。因此先由单个因素的评判入手,得出各个单因素评判结果,在此基础上作出综合评价。

对于单因素 $u_i, u_i \in U$, 单因素评判结果是 V 上的模糊集, 设为 $f(u_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \in F(V)$, n 个单因素的评判结果构成 U 到 V 的模糊关系 R :

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} f(u_1) \\ f(u_2) \\ \vdots \\ f(u_n) \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix}_{n \times m}$$

$\tilde{R} \in F(U \times V)$, \tilde{R} 为 U 到 V 的模糊关系, r_{ij} 表示 U 中因素 u_i 的评价中, 评价 v_j 等级所占的份额。

由各个因素的权重分配集 \tilde{A} 以及模糊关系 \tilde{R} , 我们就可以得综合评判的结果 $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$ 。

我们归纳模糊综合评判的数学模型如下:

三元组 (U, V, \tilde{R}) 称为综合评判空间, 其中:

- $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 为评判因素集;
- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 为评价等级集;
- $\tilde{R} \in F(U \times V)$ 是单因素评判矩阵。

若 $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in F(U)$ 是各评判因素的权重分配, 则评判结果为:

$$\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R} \in F(V) \quad (8.47)$$

模型中的 \tilde{R} 相当于一个转换器(图 8.2),当输入为 \tilde{A} 时,输出为 \tilde{B} 。合成运算为 $(V - \Lambda)$ 运算。

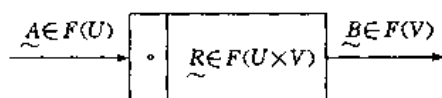


图 8.2 模糊综合评判模型

综合评判结果 \tilde{B} 是 V 上的模糊集,我们可以通过以下方法对评判结果进一步处理以得出一个直观的解释或者得出一个明确的评判。

(1) 最大隶属度原则

可按最大隶属度原则选定一个明确的评价等级。若:

$$b_{j_0} = \max_j b_j$$

则选第 j_0 评价等级为综合评判结果。

当两个以上等级的隶属度均为最大值时,最大隶属度原则难以作出明确评价。

(2) 模糊分布法

对综合评判结果 \tilde{B} 进行归一化过程,设 $\tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ 。

$$\text{令: } b'_k = b_k / \sum_{j=1}^m b_j, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\tilde{B}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$$

\tilde{B}' 为等价的评判结果, \tilde{B}' 的直观解释是: $b'_k = b_k / \sum_{j=1}^m b_j$ 表示评价等级为 v_k 在综合评价结果中占的百分比, $(b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$ 给出了 m 个评价等级所占百分比的分布。

(3) 加权平均法

加权平均法以各评判等级 v_j 的隶属度 b_j 为权系数,取各 v_j 的加权平均值作为评判结果:

$$v_0 = \sum_{j=1}^m b_j v_j / \sum_{j=1}^m b_j$$

v_0 作为综合评判结果。若评价集 V 中各元素没有数量化,使用加权平均法时应先将各 v_j 数量化,以便使用上述公式计算。

当有多个评判对象使用模糊综合评判方法进行评判并将它们进行排序时,可使用加权平均法和最大隶属度原则。

例 8.10 对某一国家的投资环境进行模糊综合评判。影响投资环境优劣的因素为:政治稳定性、市场机会、经济发展与成就、文化一元化程度、法令阻碍(如资本抽回和外商关税限制等)、实质阻碍(如自然条件差别等)、地理与文化差距等七个方面,记为 $U = (u_1, u_2, \dots, u_7)$,评价等级集为 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{\text{很满意, 满意, 不太满意, 很不满意}\}$ 。考虑到各个因素在综合评判中的重要程度,权重分配为 $\tilde{A} = (0.15, 0.3, 0.15, 0.05, 0.2, 0.1, 0.05)$ 。

对该国的投资环境进行考查后,有 30% 的人认为该国政治稳定性很满意,50% 的人

认为满意,20%的人认为不太满意,没有人认为很不满意。因此对 u_1 = 政治稳定性单因素评判结果是:

$$f(u_1) = (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

类似地有 $u_2 \sim u_6$ 单因素评判结果:

$$f(u_2) = (0.1, 0.2, 0.5, 0.2)$$

$$f(u_3) = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$$

$$f(u_4) = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$$

$$f(u_5) = (0.1, 0.3, 0.4, 0.2)$$

$$f(u_6) = (0.2, 0.4, 0.4, 0)$$

$$f(u_7) = (0.5, 0.3, 0.2, 0)$$

因此单因素评判矩阵 \tilde{R} 为:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

综合评判结果为:

$$\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R} = (0.15, 0.2, 0.3, 0.2)$$

按最大隶属度原则,评判结果为第三等级即不太满意。

按模糊分布法有 $\tilde{B}' = (0.18, 0.24, 0.34, 0.24)$,即综合评判结果中很满意、满意、不太满意和很不满意所占的百分比分别为 18%,24%,34%和 24%。

按加权平均法,将评判等级集数字化为: $V = \{1, 2, 3, 4\}$ 。于是综合评价结果等级为:

$$v = \sum_{j=1}^4 b_j v_j / \sum_{j=1}^4 b_j = \frac{0.15 + 0.2 \times 2 + 0.3 \times 3 + 0.2 \times 4}{0.15 + 0.2 + 0.3 + 0.2} = 2.65$$

它介于满意和不太满意之间且更接近于不太满意。

8.7.2 模糊综合评判模型的改进

实际应用中模糊综合评判模型常常遇到一些问题,主要有两类。一类是当涉及的因素较多时,权重不易分配,每一权重分量都很少,使得单因素评价矩阵 \tilde{R} 在合成运算 $\tilde{A} \circ \tilde{R}$ 中(即“ $V - \wedge$ ”运算)作用减弱乃至不起作用,使得评价结果不易分辨。另一类问题是合成运算采用扎德的($V - \wedge$)运算,这种运算考虑了主要因素,但会丢失其它一些信息,在某些场合使得评判结果不准确。为了减少这些问题的影响,对模糊综合评判模型进行了改进,可以采用多层次模糊综合评判模型和广义合成运算的模糊综合评判模型。

8.7.2.1 多级综合评判模型

设 U 为因素集,当 U 中因素个数较多时,可以按一定准则将 U 中因素分组,一般是将性质相近的因素分在一组。设 U 中的因素分为 l 组:

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_l\}$$

并满足: $U = \bigcup_{i=1}^l U_i$, 且当 $i \neq j$ 时 $U_i \cap U_j = \emptyset$ 。

对于每个 U_i 有:

$$U_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in(i)}\}$$

其中 $n(i)$ 表示第 i 组因素所含因素个数。

可见因素集划分了不同层次, U 为高层因素集, $U_i, i=1, 2, \dots, l$ 为低层因素集。

设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 为评价等级集, 它对任一层、任一因素评判都适用。

使用多层次综合评判模型, 首先在低层次上进行综合评判。即对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, l\}$, 对评判空间 (U_i, V, R_i) 进行综合评判。这里 R_i 是对因素集 U_i 的单因素评判矩阵。设 U_i 中各因素的权重分配为 $\tilde{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in(i)})$, 时综合评判结果为 $\tilde{B}_i = \tilde{A}_i \circ \tilde{R}_i$ 。

然后, 在高层次上进行评判, 即对评判空间 (U, V, \tilde{R}) 进行综合评判, 其中 $U = \{U_1, U_2, \dots, U_l\}$, 而单因素评判矩阵则由较低层次的综合评判的输出 \tilde{B}_i 构成:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \vdots \\ \tilde{B}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \circ \tilde{R}_1 \\ \tilde{A}_2 \circ \tilde{R}_2 \\ \vdots \\ \tilde{A}_l \circ \tilde{R}_l \end{bmatrix}_{l \times m}$$

由 U 中各因素组的权重分配为 $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_l)$, 则评判空间 (U, V, \tilde{R}) 上的评判结果, 也就是问题的最后综合评判结果为: $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$ 。

以上是二级综合评判模型, 是应用得较广泛的一种。将评判因素划分为两层以上的更多层次的多级综合评判模型评判方法与两级类似, 只是级数更多, 由最低层开始直至最高层结束。

二级综合评判模型可由图 8.3 表示。

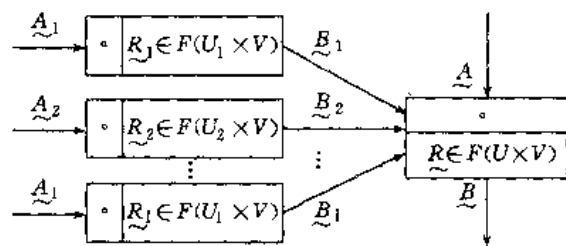


图 8.3 二级模糊综合评判模型

8.7.2.2 广义合成运算的综合评判模型

模糊综合评判的模型式(8.47)即 $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$, 采用扎德的 $(V - \wedge)$ 合成运算, 即:

$$b_j = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge r_{ij}) \quad (8.48)$$

$$1 \leq j \leq m$$

称为 $(V - \wedge)$ 型综合评判模型。

如果把 $(V-\wedge)$ 合成运算用广义的合成运算 $(\dot{V}-\dot{\wedge})$ 来代替,评价结果则为:

$$b_j = \dot{\bigvee}_{i=1}^n (a_i \dot{\wedge} r_{ij}) \quad (8.49)$$

$$1 \leq j \leq m$$

常用的广义合成运算有:

(1) $(V-\wedge)$ 型综合评判模型。

$(V-\wedge)$ 型综合评判即采用(8.48)式,其特点是突出了主因素,称为主因素决定型。

(2) $(V-\cdot)$ 型综合评判模型。

$(V-\cdot)$ 合成运算为:

$$b_j = \bigvee_{i=1}^n (a_i r_{ij}) \quad (8.50)$$

$$1 \leq j \leq m$$

$a_i r_{ij}$ 的乘法运算不丢失信息,兼顾了权重分配和单因素评价的隶属度。

(3) $(\oplus-\wedge)$ 型综合评判模型:

\oplus 表示有界和,即 $a \oplus b = \min\{1, a+b\}$ 。因此 $(\oplus-\wedge)$ 合成运算为:

$$b_j = \bigoplus_{i=1}^n (a_i \wedge r_{ij})$$

$$= \min\{1, (a_1 \wedge r_{1j}) + (a_2 \wedge r_{2j})\} \oplus (a_3 \wedge r_{3j})$$

$$\oplus \cdots \oplus (a_n \wedge r_{nj})$$

因为权重满足归一条件,即 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$,故有:

$$\sum_{i=1}^n (a_i \wedge r_{ij}) \leq 1$$

因此,对于任一正整数 $n' \leq n$ 有:

$$\sum_{i=1}^{n'} (a_i \wedge r_{ij}) \leq 1$$

于是:

$$b_j = (a_1 \wedge r_{1j}) + (a_2 \wedge r_{2j}) \oplus (a_3 \wedge r_{3j}) \oplus$$

$$\cdots \oplus (a_n \wedge r_{nj})$$

$$= (a_1 \wedge r_{1j}) + (a_2 \wedge r_{2j}) + (a_3 \wedge r_{3j}) \oplus$$

$$(a_4 \wedge r_{4j}) \oplus \cdots \oplus (a_n \wedge r_{nj})$$

$$\cdots$$

$$= \sum_{i=1}^n (a_i \wedge r_{ij}) \quad (8.51)$$

式(8.51)即 $(\oplus-\wedge)$ 型综合评判的计算模型。

(4) $(\oplus-\cdot)$ 型综合评判模型

$(\oplus-\cdot)$ 型综合评判模型为:

$$b_j = \bigoplus_{i=1}^n (a_i r_{ij})$$

与(8.51)式推导过程类似,有:

$$b_j = \sum_{i=1}^n (a_i r_{ij}) \quad (8.52)$$

式(8.52)为 $(\oplus - \cdot)$ 型综合评判模型,亦称加权平均模型。

在实际进行综合评判时,如果权重最大的因素起主导作用,可考虑选模型(1)或模型(2),若各因素作用比较均衡,可考虑选模型(4)或模型(3)。一般可同时选用 n 种模型同时评价然后再比较综合评判结果。

例 8.11 评判一个企业的发展能力,综合评判的因素集定为:

$$\begin{aligned} U &= \{U_1, U_2, U_3\} \\ &= \{\text{运行状况, 企业精神, 基本素质}\} \end{aligned}$$

而运行状况(U_1)、企业精神(U_2)和企业基本素质(U_3)又分别可包含下述因素:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \\ &= \{\text{经济效益, 市场占有, 能源利用}\} \\ U_2 &= \{u_{21}, u_{22}, u_{23}\} \\ &= \{\text{企业管理, 应变能力, 企业凝聚力}\} \\ U_3 &= \{u_{31}, u_{32}\} \\ &= \{\text{人员素质, 设备能力}\} \end{aligned}$$

评判的评语集定为:

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ &= \{\text{很大, 大, 一般, 小}\} \end{aligned}$$

经过对某企业的调查分析,得到该企业的单因素评判矩阵,关于 U_1, U_2, U_3 各因素组的单因素评判矩阵分别为:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \\ \tilde{R}_2 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \\ \tilde{R}_3 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果规定 U_1, U_2, U_3 以及 U 中的权重分配分别为:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= (0.5, 0.3, 0.2) \\ \tilde{A}_2 &= (0.4, 0.4, 0.2) \\ \tilde{A}_3 &= (0.6, 0.4) \\ \tilde{A} &= (0.2, 0.3, 0.5) \end{aligned}$$

我们可用两级综合评判模型求解此问题,采用“ $V - \wedge$ ”合成运算关于 U_1, U_2, U_3 的综合评判分别为:

$$\tilde{B}_1 = \tilde{A}_1 \circ \tilde{R}_1$$

$$= (0.5, 0.3, 0.2) \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= (0.2, 0.3, 0.5, 0.2)$$

$$\tilde{B}_2 = \tilde{A}_2 \circ \tilde{R}_2$$

$$= (0.4, 0.4, 0.2) \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$= (0.2, 0.4, 0.3, 0.2)$$

$$\tilde{B}_3 = \tilde{A}_3 \circ \tilde{R}_3$$

$$= (0.6, 0.4) \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (0.3, 0.5, 0.3, 0.1)$$

将三个评判结果进行归一化处理有:

$$\tilde{B}_1 = (0.2/1.2, 0.3/1.2, 0.5/1.2, 0.2/1.2)$$

$$= (0.17, 0.25, 0.41, 0.17)$$

$$\tilde{B}_2 = (0.18, 0.37, 0.27, 0.18)$$

$$\tilde{B}_3 = (0.25, 0.42, 0.25, 0.08)$$

根据一级评判结果可以构造二级综合评判的单因素评判矩阵 \tilde{R} :

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.17 & 0.25 & 0.41 & 0.17 \\ 0.18 & 0.37 & 0.27 & 0.18 \\ 0.25 & 0.42 & 0.25 & 0.08 \end{bmatrix}$$

于是二级综合评判结果为:

$$\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$$

$$= (0.2, 0.3, 0.5) \circ \begin{bmatrix} 0.17 & 0.25 & 0.41 & 0.17 \\ 0.18 & 0.37 & 0.27 & 0.18 \\ 0.25 & 0.42 & 0.25 & 0.08 \end{bmatrix}$$

$$= (0.25, 0.42, 0.27, 0.18)$$

将 \tilde{B} 归一化后为: $\tilde{B} = (0.22, 0.38, 0.24, 0.16)$

如果用模糊分布法对综合评判结果进行解释,则评判结果中该企业发展能力“很大”、“大”、“一般”、“小”所占的比重分别为 22%, 38%, 24%, 16%。

如果用最大隶属度原则,则评判结果为该企业发展能力为“大”。

如果用加权平均法,将 v_1, v_2, v_3, v_4 即“很大”,“大”,“一般”,“小”四个等级数量化为 1, 2, 3, 4, 则加权平均结果为:

$$v = \sum_{j=1}^4 b_j v_j / \sum_{j=1}^4 b_j = 2.34$$

可见该企业发展能力等级为 2.34, 介于“大”与“一般”之间, 更接于“大”。

8.7.3 模糊综合评判的逆问题

上一节我们介绍的是模糊综合评判的正问题, 也就是由给定的权重 \tilde{A} 求出评价 $\tilde{B} = \tilde{A} \circ \tilde{R}$ 。实际中还遇到另一类问题, 综合评价 \tilde{B} 已知, 要确定 \tilde{B} 所依赖的权重 \tilde{A} , 这就是模糊综合评判的逆问题。

例如, 某种计算机投放市场后很畅销或很滞销, 都有必要了解其中的原因, 以便更好地组织生产, 很重要的一条就是了解广大客户对产品评价所持的权重。

综合评判的逆问题实质上就是求解模糊关系方程:

$$\tilde{X} \circ \tilde{R} = \tilde{B}$$

这个问题这里不作讨论, 有兴趣的读者可以参看其它参考书。但在实际应用中, 常常可以采用如下的方法求得综合评判逆问题的近似解。这一方法是: 先请专门人员根据经验给出一组不同的权重, 称为权重备择集, 然后根据择近原则(参看 9.3 节)从权重备择集中选出一个相对最理想的权重分配方案。

设权重备择集为 $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_s\}$, 若:

$$(\tilde{A}^* \circ \tilde{R}, \tilde{B}) = \max\{(\tilde{A}_j \circ \tilde{R}, \tilde{B}) \mid 1 \leq j \leq s\}$$

则认为 \tilde{A}^* 是备择集中相对最佳的权重分配, 其中 $(\tilde{A}_j \circ \tilde{R}, \tilde{B})$ 表示 $\tilde{A}_j \circ \tilde{R}$ 与 \tilde{B} 的贴近度。

例 8.12 对某种型号的计算机进行综合评判因素集为 $U = \{u_1, u_2, u_3\} = \{\text{价格, 可靠性, 性能}\}$ 评语集为 $V = \{\text{优, 良, 中, 劣}\}$, 如果单因素评判矩阵为:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

已知权重备择集为:

$$\tilde{A}_1 = (0.1, 0.4, 0.5)$$

$$\tilde{A}_2 = (0.3, 0.4, 0.3)$$

$$\tilde{A}_3 = (0.5, 0.3, 0.2)$$

综合评判的评价为:

$$\tilde{B} = (0.1, 0.4, 0.3, 0.2)$$

采用主因素决定型模型计算得出:

$$\tilde{B}_1 = \tilde{A}_1 \circ \tilde{R} = (0.1, 0.4, 0.4, 0.2)$$

$$\tilde{B}_2 = \tilde{A}_2 \circ \tilde{R} = (0.3, 0.3, 0.4, 0.2)$$

$$\tilde{B}_3 = \tilde{A}_3 \circ \tilde{R} = (0.5, 0.3, 0.3, 0.2)$$

再选用格贴近度计算得:

$$(\tilde{B}_1, \tilde{B}) = (\tilde{B}_1 \odot \tilde{B}) \wedge (\tilde{B}_1 \otimes \tilde{B})^c = 0.4$$

$$(\tilde{B}_2, \tilde{B}) = 0.3$$

$$(\tilde{B}_3, \tilde{B}) = 0.3$$

因为:

$$(\tilde{B}_1, \tilde{B}) = \max\{(\tilde{B}_j, \tilde{B}) \mid j=1, 2, 3\}$$

故根据择近原则认为 \tilde{A}_1 为相对最佳的权重分配方案。

第九章 模糊模式识别

在科学分析和决策中,经常需要对某一事物进行判断、识别和归类。当我们得到一个新样本时,常常要判断:它属于哪一类呢?它是不是一个新的类型呢?这需把这一新样本对已知的各种标准类型进行识别。如图象、文字的识别,疾病、故障的诊断,矿藏情况的判别,指纹、脸形的识别等等,这均属于模式识别的问题。

本章介绍模式识别的模糊集方法。主要有两类,一类是元素对标准模糊集的识别,即待识别的对象是明确的元素,而标准类型是模糊的。另一类是模糊集对模糊集的识别,即待识别的对象是模糊的,标准类型也是模糊的。它们都属于模糊模式识别。

模糊模式识别主要包括三个步骤:

第一步:提取识别对象的特征。由识别对象中提取与识别相关的特征,并度量这些特征。

第二步:建立标准类型的隶属函数。标准类型通常是特征论域上的模糊集。

第三步:选定识别判决准则,并用之识别待识别对象。常用的识别判决准则是最大隶属度原则(直接法)和择近原则(间接法)。

9.1 模糊模式识别的直接方法

当标准类型为一些表示模糊概念的模糊集,待识别对象是论域中某一元素(个体)时,识别方法称为直接法。这种情况下,识别对象往往不会绝对地属于某一种标准类型而绝对地不属于其它标准类型,也就是说它对各种标准类型的隶属度取值范围不是 $\{0,1\}$ 而是 $[0,1]$ 。人们处理这种性质的问题时,常常是择其大而从之,即按最大隶属度原则来识别。

1. 最大隶属度原则

最大隶属度原则表述为:设 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n \in F(X)$,是 n 个标准类型,待识别元素为 $x_0 \in X$,若:

$$\tilde{A}^*(x_0) = \max\{\tilde{A}_j(x_0) | 1 \leq j \leq n\}$$

则认为 x_0 相对归属于 \tilde{A}^* 所代表的类型, $\tilde{A}^* \in \{\tilde{A}_j\}$ 。

例 9.1 考虑社会经济系统中的通货膨胀问题。论域 X 为非负的实数集合,即 $X = R_+$,对于 $x \in R_+$, x 表示一个社会经济系统中的物价上涨幅度为 $x\%$,"通货稳定","一般通货膨胀","严重通货膨胀"和"恶性通货膨胀"表示通货膨胀的四个模糊概念,即四个标准类型,我们用 R_+ 上的四个模糊集合 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$ 代表,现给定一特定的通货膨胀指标 $x_0 = 8$,判断物价上涨 8% 属于哪一类通货膨胀情形。 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$ 的隶属函数分别为:

$$\tilde{A}_1(x) = (1 + x^2/10)^{-1}, \quad x \in R_+$$

$$\tilde{A}_2(x) = (1 + (x-10)^2/10)^{-1}, \quad x \in R_+$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_3(x) &= (1 + (x-20)^2/10)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}_+ \\ \tilde{A}_4(x) &= \begin{cases} (1 + 10/(x-20)^2)^{-1}, & 20 < x < +\infty \\ 0, & 0 \leq x \leq 20 \end{cases} \end{aligned}$$

当 $x_0=8$, 经计算得:

$$\tilde{A}_1(x_0)=0.135, \tilde{A}_2(x_0)=0.714, \tilde{A}_3(x_0)=0.065, \tilde{A}_4(x_0)=0$$

由最大隶属度原则, x_0 归属于“一般通货膨胀”。

例 9.2 若三角形形状分别等腰三角形 \tilde{I} 、直角三角形 \tilde{R} 、正三角形 \tilde{E} 和非典型三角形 \tilde{T} 等四个标准类型, 取论域 X 为:

$$X = \{x | x = (A, B, C), A+B+C=180, A \geq B \geq C\}$$

式中 A, B, C 为三角形三个角的度数, 在例 1.11 中已经建立了这四种三角型的隶属函数:

$$\tilde{I}(x) = 1 - \frac{1}{60}((A-B) \wedge (B-C))$$

$$\tilde{R}(x) = 1 - \frac{1}{90}|A-90|$$

$$\tilde{E}(x) = 1 - \frac{1}{180}(A-C)$$

$$\tilde{T}(x) = \frac{1}{180} \min(3(A-B), 3(B-C), 2|A-90|, (A-C))$$

现给定三角形 $x_0 = (A, B, C) = (85, 50, 45)$, 则 x_0 对以上四个标准类型的隶属度分别为:

$$\tilde{I}(x_0) = 0.916, \tilde{R}(x_0) = 0.94$$

$$\tilde{E}(x_0) = 0.7, \tilde{T}(x_0) = 0.06$$

那么, 由最大隶属度原则, x_0 相对属于直角三角形。

2. 阈值原则

在实际模糊模式识别中还可能出现如下两种变形, 一种是有时待识别对象 x_0 对于标准类型 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ 中每一个的隶属度都不高, 这说明模糊集 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ 对元素 x_0 不能识别。另一种是有时待识别对象 x_0 对标准类型 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ 中两个或两个以上隶属度都相对较高且相差不多。这两种情况下有下述阈值原则。

阈值原则: 设 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n \in F(X)$ 是 n 个标准类型, $x_0 \in X, d \in (0, 1]$ 为一阈值水平。令:

$$\alpha = \max\{\tilde{A}_j(x_0) | 1 \leq j \leq n\}$$

若 $\alpha < d$, 则不能识别 x_0 , 称为“拒识”, 应查找原则另作分析; 若 $\alpha \geq d$, 且有 $\tilde{A}_{i_1}(x_0) \geq d, \tilde{A}_{i_2}(x_0) \geq d, \dots, \tilde{A}_{i_m}(x_0) \geq d$, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_m \in [1, 2, \dots, n]$, 则识别 x_0 相对地属于 $\tilde{A}_{i_1} \cap \tilde{A}_{i_2} \cap \dots \cap \tilde{A}_{i_m}$ 。

也可以将阈值原则和最大隶属度原则相结合: 当 $\alpha \geq d$ 时, 按最大隶属度原则识别。

例 9.3 在例 9.2 中, 取 $d=0.9$, 由于 $\tilde{I}(x_0)=0.916 \geq 0.9, \tilde{R}(x_0)=0.94 \geq 0.9$, 按阈值原则, x_0 相对地属于 $\tilde{I} \cap \tilde{R}$, 即 $x_0=(85, 50, 45)$ 可识别为等腰直角三角形。

9.2 模糊距离与贴近度

两个模糊集之间按某种特性进行比较时,可以使用一些数量指标表示比较的结果。两个重要的数量指标是模糊距离与贴近度,前者表示两个模糊集之间的差异的程度,而后者则反映了两个模糊集接近的程度。

9.2.1 模糊距离

定义 9.1 设 $M_P: F(X) \times F(X) \rightarrow [0, +\infty)$, $P \in \mathbb{R}_+$, 为正实数, 对 $\forall (\tilde{A}, \tilde{B}) \in F(X) \times F(X)$, 当 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时令:

$$M_P(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\sum_{i=1}^n |\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i)|^P]^{1/P} \quad (9.1)$$

当 $X = [a, b]$ 时令:

$$M_P(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\int_a^b |\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x)|^P dx]^{1/P} \quad (9.2)$$

称 M_P 为 $F(X)$ 上的闵可夫斯基(Minkowski)距离, 称 $M_P(\tilde{A}, \tilde{B})$ 为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的闵可夫斯基距离。

当 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时令:

$$M'_P(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i)|^P]^{1/P} \quad (9.3)$$

当 $X = [a, b]$ 时令:

$$M'_P(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\frac{1}{b-a} \int_a^b |\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x)|^P dx]^{1/P} \quad (9.4)$$

称 $M'_P(\tilde{A}, \tilde{B})$ 为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的相对闵可夫斯基距离, 并有 $M'_P(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ 。

特别地, 当 $P=1$ 时, 有:

$$M_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^n |\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i)| \quad (9.5)$$

或:

$$M_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_a^b |\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x)| dx \quad (9.6)$$

$M_1(\tilde{A}, \tilde{B})$ 称为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的海明(Hamming)距离。

$$M'_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i)| \quad (9.7)$$

或:

$$M'_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b |\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x)| dx \quad (9.8)$$

$M'_1(\tilde{A}, \tilde{B})$ 称为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的相对海明距离。

当 $P=2$ 时, 类似地有:

$$M_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\sum_{i=1}^n (\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i))^2]^{1/2} \quad (9.9)$$

或:

$$M_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\int_a^b (\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x))^2 dx]^{1/2} \quad (9.10)$$

$M_2(\tilde{A}, \tilde{B})$ 称为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的欧氏(Euclid)距离。

$$M'_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.11)$$

或
$$M'_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b (\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.12)$$

$M'_2(\tilde{A}, \tilde{B})$ 称为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的相对欧氏距离。

还有加权海明距离。

定义 9.2 设 $M_w: F(X) \times F(X) \rightarrow [0, 1]$, 对 $\forall (\tilde{A}, \tilde{B}) \in F(X) \times F(X)$ 。当 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时, $\sum_{i=1}^n w(x_i) = 1$, 令:

$$M_w(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^n w(x_i) |\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i)| \quad (9.13)$$

当 $X = [a, b]$ 时, $\int_a^b w(x) dx = 1$, 令:

$$M_w(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_a^b w(x) |\tilde{A}(x) - \tilde{B}(x)| dx \quad (9.14)$$

称 $M_w(\tilde{A}, \tilde{B})$ 为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的加权海明距离, 其中 $w(x_i)$ 为 x_i 的权重, $0 \leq w(x_i) \leq 1$ 。

例 9.4 设 $\tilde{A} = 0.7/x_1 + 0.3/x_2 + 0.5/x_3$, $\tilde{B} = 0.8/x_1 + 0.4/x_2 + 0.2/x_3$, 设权重分配为 $w = (0.5, 0.23, 0.27)$, 计算 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的海明距离 $M_1(\tilde{A}, \tilde{B})$ 、相对海明距离 $M'_1(\tilde{A}, \tilde{B})$ 、加权海明距离 $M_w(\tilde{A}, \tilde{B})$ 以及欧氏距离 $M_2(\tilde{A}, \tilde{B})$ 、相对欧氏距离 $M'_2(\tilde{A}, \tilde{B})$ 。

解:
$$M_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = |0.7 - 0.8| + |0.3 - 0.4| + |0.5 - 0.2|$$

$$= 0.5$$

$$M'_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.167$$

$$M_w(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.5 \times 0.1 + 0.23 \times 0.1 + 0.27 \times 0.3$$

$$= 0.154$$

$$M_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = (|0.7 - 0.8|^2 + |0.3 - 0.4|^2 + |0.5 - 0.2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{0.11} = 0.332$$

$$M'_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{3} \times 0.11} = 0.191$$

9.2.2 模糊集合的内积与外积

为了讨论模糊集合的贴近度, 我们先引入内积与外积的概念。

首先先看有限论域的情形。

定义 9.3 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为有限论域, $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$, \tilde{A}, \tilde{B} 分别可用模糊向量的形式来表示:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

则称

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} = \bigvee_{i=1}^n (\tilde{A}(x_i) \wedge \tilde{B}(x_i))$$

$$= \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge b_i) \quad (9.15)$$

为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的内积, 称

$$\begin{aligned} \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= \bigwedge_{i=1}^n (\tilde{A}(x_i) \vee \tilde{B}(x_i)) \\ &= \bigwedge_{i=1}^n (a_i \vee b_i) \end{aligned} \quad (9.16)$$

为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 的外积。

例 9.5 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, 模糊向量 \tilde{A} 和 \tilde{B} 分别为:

$$\tilde{A} = (0.7, 0.3, 1, 0.9)$$

$$\tilde{B} = (0.9, 0, 0.6, 0.5)$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{A} \odot \tilde{B} &= (0.7 \wedge 0.9) \vee (0.3 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0.6) \vee (0.9 \wedge 0.5) \\ &= 0.7 \vee 0 \vee 0.6 \vee 0.5 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (0.7 \vee 0.9) \wedge (0.3 \vee 0) \wedge (1 \vee 0.6) \wedge (0.9 \vee 0.5) \\ &= 0.9 \wedge 0.3 \wedge 1 \wedge 0.9 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

定义 9.4 设 $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 令:

$$\bar{\tilde{A}} = \bigvee_{i=1}^n a_i, \quad \underline{\tilde{A}} = \bigwedge_{i=1}^n a_i$$

称 $\bar{\tilde{A}}$ 和 $\underline{\tilde{A}}$ 分别为 \tilde{A} 的高和底。对于无限论域的情形则有:

$$\bar{\tilde{A}} = \bigvee_{x \in X} \tilde{A}(x), \quad \underline{\tilde{A}} = \bigwedge_{x \in X} \tilde{A}(x)$$

模糊向量的内积和外积有如下性质。

性质 9.1 若模糊向量 \tilde{A}, \tilde{B} 分别为:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

则内积与外积运算有下述性质:

$$(1) (\tilde{A} \odot \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \otimes \tilde{B}^c$$

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \odot \tilde{B}^c$$

(这里 c 表示 $[0, 1]$ 中的补运算, 即 $a^c = 1 - a, \tilde{A}^c = \{1 - a_i\}$)

$$(2) \tilde{A} \odot \tilde{B} \leq \bar{\tilde{A}} \wedge \bar{\tilde{B}}$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} \geq \underline{\tilde{A}} \vee \underline{\tilde{B}}$$

$$(3) \tilde{A} \odot \tilde{A} = \bar{\tilde{A}}, \quad \tilde{A} \otimes \tilde{A} = \underline{\tilde{A}}$$

$$\tilde{A} \odot \tilde{A}^c \leq \frac{1}{2}, \quad \tilde{A} \otimes \tilde{A}^c \geq \frac{1}{2}$$

(4) 若 $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ 则:

$$\tilde{A} \odot \tilde{C} \leq \tilde{B} \odot \tilde{C}$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{C} \leq \tilde{B} \otimes \tilde{C}$$

证明:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \underset{\sim}{(A \odot B)}^c &= 1 - \underset{\sim}{(A \odot B)} \\
 &= 1 - \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge b_i) \\
 &= \bigwedge_{i=1}^n [1 - (a_i \wedge b_i)] \\
 &= \bigwedge_{i=1}^n [(1 - a_i) \vee (1 - b_i)] \\
 &= \bigwedge_{i=1}^n [(a_i)^c \vee (b_i)^c] \\
 &= \underset{\sim}{A}^c \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{B}^c
 \end{aligned}$$

我们用 $\underset{\sim}{A}^c$ 和 $\underset{\sim}{B}^c$ 取代上面等式中的 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$, 得:

$$(\underset{\sim}{A}^c \underset{\sim}{\odot} \underset{\sim}{B}^c)^c = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{B}$$

对上式两边取补:

$$\underset{\sim}{A}^c \underset{\sim}{\odot} \underset{\sim}{B}^c = (\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{B})^c$$

性质(1)证毕。

$$(2) \quad \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\odot} \underset{\sim}{B} = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge b_i) \leq \bigvee_{i=1}^n a_i = \underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\odot} \underset{\sim}{B} = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge b_i) \leq \bigvee_{i=1}^n b_i = \underset{\sim}{B}$$

故有: $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\odot} \underset{\sim}{B} \leq \underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{B} = \bigwedge_{i=1}^n (a_i \vee b_i) \geq \bigvee_{i=1}^n a_i = \underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{B} = \bigwedge_{i=1}^n (a_i \vee b_i) \geq \bigwedge_{i=1}^n b_i = \underset{\sim}{B}$$

故有: $\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{B} \geq \underset{\sim}{A} \vee \underset{\sim}{B}$

$$(3) \quad \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\odot} \underset{\sim}{A} = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge a_i)$$

$$= \bigvee_{i=1}^n a_i$$

$$= \underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{A} = \bigwedge_{i=1}^n (a_i \vee a_i)$$

$$= \bigwedge_{i=1}^n a_i$$

$$= \underset{\sim}{A}$$

对 $\forall a_i \in [0, 1]$, 有:

$$a_i \wedge (a_i)^c = a_i \wedge (1 - a_i) \leq \frac{1}{2}$$

$$a_i \vee (a_i)^c = a_i \vee (1 - a_i) \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{故: } \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\odot} \underset{\sim}{A}^c = \bigvee_{i=1}^n [a_i \wedge (a_i)^c] \leq \frac{1}{2}$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{A}^c = \bigwedge_{i=1}^n [a_i \vee (a_i)^c] \geq \frac{1}{2}$$

(4) 由于 $A \subseteq B$, 故对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有:

$$a_i \leq b_i$$

$$A \odot C = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge c_i)$$

$$B \odot C = \bigvee_{i=1}^n (b_i \wedge c_i)$$

因为:

$$(a_i \wedge c_i) \leq (b_i \wedge c_i)$$

故:

$$A \odot C \leq B \odot C$$

同理:

$$A \otimes C \leq B \otimes C$$

模糊集的内积和外积的概念可以推广到一般论域情形, 即既可以是有限论域也可以是无限论域。

定义 9.5 设 X 是连续论域, $A, B \in F(X)$, 称

$$A \odot B = \bigvee_{x \in X} (A(x) \wedge B(x))$$

为 A 与 B 的内积。称

$$A \otimes B = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \vee B(x))$$

为 A 与 B 的外积。

在有限论域中内积与外积的运算性质 9.1 对无限论域的情形也成立。

9.2.3 贴近度

贴近度用于刻划两个模糊集相近的程度, 它是一个数量指标。

贴近度的定义如下。

定义 9.6 设映射

$$N: F(X) \times F(X) \rightarrow [0, 1]$$

满足以下条件:

- (1) $\forall A \in F(X), N(A, A) = 1$
- (2) $\forall A, B \in F(X), N(A, B) = N(B, A)$
- (3) 若 $A, B, C \in F(X)$, 对 $\forall x \in X$ 满足:

$$|A(x) - C(x)| \geq |A(x) - B(x)|$$

则有:

$$N(A, C) \leq N(A, B)$$

则称映射 N 为 $F(X)$ 上的贴近度, 称 $N(A, B)$ 为 A 与 B 的贴近度。

贴近度有很多具体的表示形式, 下面介绍几种常见的贴近度公式。

1. 用模糊距离表示贴近度

用相对海明距离 $M'_1(A, B)$ 表示的海明贴近度 N_H :

$$N_H(A, B) = 1 - M'_1(A, B)$$

$$N_H(\underline{A}, \underline{B}) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i)| \quad (9.17)$$

或

$$N_H(\underline{A}, \underline{B}) = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |\underline{A}(x) - \underline{B}(x)| dx \quad (9.18)$$

用相对欧氏距离 $M'_2(\underline{A}, \underline{B})$ 表示的欧氏贴近度 N_E :

$$N_E(\underline{A}, \underline{B}) = 1 - M'_2(\underline{A}, \underline{B})$$

$$N_E(\underline{A}, \underline{B}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^n (\underline{A}(x_i) - \underline{B}(x_i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.19)$$

或:

$$N_E(\underline{A}, \underline{B}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left[\int_a^b (\underline{A}(x) - \underline{B}(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.20)$$

2. 用模糊度表示贴近度

设 $\underline{A}, \underline{B} \in F(X)$, 构造一个新的模糊集 $\underline{A} \ominus \underline{B} \in F(X)$, 其隶属函数为:

$$(\underline{A} \ominus \underline{B})(x) = \frac{1}{2} (1 + |\underline{A}(x) - \underline{B}(x)|) \quad (9.21)$$

$$\forall x \in X$$

我们可以用 $\underline{A} \ominus \underline{B}$ 的模糊度 $D(\underline{A} \ominus \underline{B})$ 来表示 \underline{A} 和 \underline{B} 的贴近度, 即:

$$N(\underline{A}, \underline{B}) = D(\underline{A} \ominus \underline{B})$$

可以验证 $N(\underline{A}, \underline{B})$ 满足定义 9.5 的三个条件, 验证如下:

条件(1): $\forall \underline{A} \in F(X), \forall x \in X$, 由式 9.21 有:

$$(\underline{A} \ominus \underline{A})(x) = \frac{1}{2}$$

故:

$$N(\underline{A}, \underline{A}) = D(\underline{A} \ominus \underline{A}) = 1$$

条件(2): 由式 9.21 有:

$$\underline{A} \ominus \underline{B} = \underline{B} \ominus \underline{A}$$

故:

$$N(\underline{A}, \underline{B}) = N(\underline{B}, \underline{A})$$

条件(3): 对 $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \in F(X)$, 设 $\forall x \in X$ 有:

$$|\underline{A}(x) - \underline{C}(x)| \geq |\underline{A}(x) - \underline{B}(x)|$$

由式(9.21)有:

$$(\underline{A} \ominus \underline{C})(x) \geq (\underline{A} \ominus \underline{B})(x) \geq \frac{1}{2}$$

故:

$$N(\underline{A}, \underline{C}) = D(\underline{A} \ominus \underline{C}) \leq D(\underline{A} \ominus \underline{B}) = N(\underline{A}, \underline{B})$$

3. 格贴近度

格贴近度是用模糊集的内积和外积来表示。

定义 9.7 设 $\underline{A}, \underline{B} \in F(X)$, 称

$$(\underline{A}, \underline{B}) = N(\underline{A}, \underline{B}) = (\underline{A} \odot \underline{B}) \wedge (\underline{A} \otimes \underline{B}) \quad (9.22)$$

$$(\text{或} = \frac{1}{2} [\underline{A} \odot \underline{B} + (\underline{A} \otimes \underline{B})])$$

为 \underline{A} 和 \underline{B} 的格贴近度, 格贴近度常记为 $(\underline{A}, \underline{B})$ 。

格贴近度一般情况下并不完全满足定义 9.5 规定的贴近度的三个条件。格贴近度计

算很方便,当用于表示相同类型的模糊集的贴近度时比较有效。

格贴近度有如下性质。

性质 9.2 格贴近度的性质如下:

- (1) $0 \leq (\underline{A}, \underline{B}) \leq 1$
- (2) $(\underline{A}, \underline{B}) = (\underline{B}, \underline{A})$
- (3) $(\underline{A}, \underline{A}) = \bar{A} \wedge (\underline{A})^c$, 当 $\bar{A}=1, \underline{A}=0$ 时, 有 $(\underline{A}, \underline{A})=1$ 。
- (4) 若 $\underline{A} \subseteq \underline{B} \subseteq \underline{C}$ 则 $(\underline{A}, \underline{C}) \leq (\underline{A}, \underline{B}) \wedge (\underline{B}, \underline{C})$ 。

证明:

(1) 由格贴近度的定义式(9.22)显见。

(2) 因为: $\underline{A} \odot \underline{B} = \underline{B} \odot \underline{A}$
 $\underline{A} \otimes \underline{B} = \underline{B} \otimes \underline{A}$

故: $(\underline{A}, \underline{B}) = (\underline{A} \odot \underline{B}) \wedge (\underline{A} \otimes \underline{B})^c$
 $= (\underline{B} \odot \underline{A}) \wedge (\underline{B} \otimes \underline{A})^c$
 $= (\underline{B}, \underline{A})$

(3) $(\underline{A}, \underline{A}) = (\underline{A} \odot \underline{A}) \wedge (\underline{A} \otimes \underline{A})^c$
 $= \bar{A} \wedge (\underline{A})^c$ (见性质 9.1 的(3))

若 $\bar{A}=1, \underline{A}=0$ 则:

$$(\underline{A}, \underline{A}) = 1 \wedge 0^c = 1$$

(4) 因为 $\underline{A} \subseteq \underline{B} \subseteq \underline{C}$

故 $\forall x \in X$ 有:

$$\begin{aligned} \underline{A}(x) &\leq \underline{B}(x) \leq \underline{C}(x) \\ (\underline{A}, \underline{C}) &= (\underline{A} \odot \underline{C}) \wedge (\underline{A} \otimes \underline{C})^c \\ &= [\bigvee_{x \in X} (\underline{A}(x) \wedge \underline{C}(x))] \wedge [1 - \bigwedge_{x \in X} (\underline{A}(x) \vee \underline{C}(x))] \\ &= [\bigvee_{x \in X} \underline{A}(x)] \wedge [1 - \bigwedge_{x \in X} \underline{C}(x)] \end{aligned}$$

同样:

$$\begin{aligned} (\underline{A}, \underline{B}) &= [\bigvee_{x \in X} \underline{A}(x)] \wedge [1 - \bigwedge_{x \in X} \underline{B}(x)] \\ (\underline{B}, \underline{C}) &= [\bigvee_{x \in X} \underline{B}(x)] \wedge [1 - \bigwedge_{x \in X} \underline{C}(x)] \end{aligned}$$

因为:

$$\begin{aligned} [1 - \bigwedge_{x \in X} \underline{C}(x)] &< [1 - \bigwedge_{x \in X} \underline{B}(x)] \\ \bigvee_{x \in X} \underline{A}(x) &< \bigvee_{x \in X} \underline{B}(x) \end{aligned}$$

故:

$$\begin{aligned} (\underline{A}, \underline{C}) &\leq (\underline{A}, \underline{B}) \\ (\underline{A}, \underline{C}) &\leq (\underline{B}, \underline{C}) \end{aligned}$$

因此 $(\underline{A}, \underline{C}) \leq (\underline{A}, \underline{B}) \wedge (\underline{B}, \underline{C})$, 证毕。

例 9.6 设 $\underline{A}, \underline{B} \in F(R)$, $\underline{A}, \underline{B}$ 均为正态分布模糊集合, 其隶属函数分别为(见图 9.1);

$$\tilde{A}(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{c_1}\right)^2}$$

$$\tilde{B}(x) = e^{-\left(\frac{x-b}{c_2}\right)^2}$$

求 $\tilde{A} \odot \tilde{B}$, $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ 及 (\tilde{A}, \tilde{B}) 。

$$\text{解: } \tilde{A} \odot \tilde{B} = \bigvee_{x \in R} (\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)) = \overline{A \cap B}$$

即 $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ 的高, 亦即 $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ 的峰值, 对应图 9.1 的 x^* 点。求 x^* 点, 令:

$$\left(\frac{x-a}{c_1}\right)^2 = \left(\frac{x-b}{c_2}\right)^2$$

因为 $x^* \in [a, b]$, 解上式得:

$$x^* = \frac{c_2 a + c_1 b}{c_1 + c_2}$$

故:

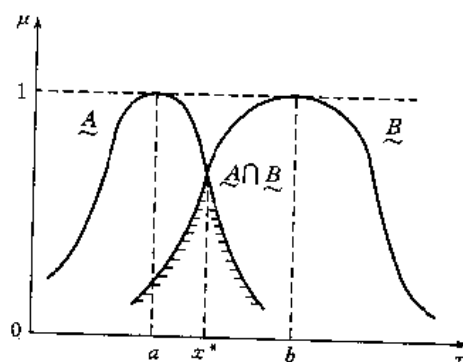


图 9.1 例 9.6 图示

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} = e^{-\left(\frac{x^*-a}{c_1}\right)^2} = e^{-\left(\frac{b-a}{c_1+c_2}\right)^2}$$

由于:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{A}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{B}(x) = 0$$

故:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \bigwedge_{x \in R} (\tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)) = 0$$

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\tilde{A} \odot \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \otimes \tilde{B})^c$$

$$= e^{-\left(\frac{b-a}{c_1+c_2}\right)^2} \wedge 0^c$$

$$= e^{-\left(\frac{b-a}{c_1+c_2}\right)^2}$$

4. 测度贴近度

定义 9.8 设映射

$$N_i: F(X) \times F(X) \rightarrow [0, 1], \quad i=1, 2$$

$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F(X)$, 当 $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ 时, 令:

$$N_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{i=1}^n [\tilde{A}(x_i) \wedge \tilde{B}(x_i)]}{\sum_{i=1}^n [\tilde{A}(x_i) \vee \tilde{B}(x_i)]} \quad (9.23)$$

$$N_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{2 \sum_{i=1}^n [\tilde{A}(x_i) \wedge \tilde{B}(x_i)]}{\sum_{i=1}^n [\tilde{A}(x_i) + \tilde{B}(x_i)]} \quad (9.24)$$

当 $X = R$ 时令:

$$N_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)] dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)] dx} \quad (9.25)$$

$$N_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)] dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}(x) dx} \quad (9.26)$$

称 N_1, N_2 为测度贴近度, 式中假设积分收敛。

测度贴近度与格贴近度类似, 不完全满足贴近度定义的三个条件, 它不满足条件(3), 但满足下面的条件: 若 $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C}$, 则 $N_i(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq N_i(\tilde{A}, \tilde{B})$ 。

若 $\tilde{A} \in F(X), X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 令:

$$|\tilde{A}| = \sum_{i=1}^n \tilde{A}(x_i)$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{n}$$

$|\tilde{A}|$ 与 $\|\tilde{A}\|$ 分别称为 \tilde{A} 的基数与相对基数。于是式(9.23)和式(9.24)可用基数来表示:

$$N_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cup \tilde{B}|}$$

$$N_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{2|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A}| + |\tilde{B}|}$$

对于连续实数域 R 的情况, 把积分解释成面积, 式(9.25)和式(9.26)则可表示为:

$$N_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\text{曲线}(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \text{ 下的面积}}{\text{曲线}(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \text{ 下的面积}}$$

$$N_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{2 \text{ 曲线}(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \text{ 下的面积}}{\tilde{A}(x) \text{ 下的面积} + \tilde{B}(x) \text{ 下的面积}}$$

9.3 模糊模式识别的间接方法

在模糊模式识别的直接方法中, 待识别的对象是论域中的一个元素, 而在间接方法中, 待识别的对象则是论域上的一个模糊集, 这类问题用下面的择近原则来识别。

择近原则描述如下: 设论域为 $X, \tilde{B} \in F(X)$ 为待识别对象, $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n \in F(X)$ 为 n 个标准类型, N 为 $F(X)$ 上的贴近度, 若:

$$N(\tilde{A}_i, \tilde{B}) = \max \{N(\tilde{A}_j, \tilde{B}) | 1 \leq j \leq n\}$$

则认为 \tilde{B} 与 \tilde{A}_i 最贴近, 判定 \tilde{B} 属于 \tilde{A}_i 类型。

择近原则中使用的贴近度可以是上小节所介绍的各种贴近度的表示。

例 9.7 设论域 U 上有三个模糊集:

$$\tilde{A}_1 = (0.9, 0.1, 0.6, 0.3)$$

$$\tilde{A}_2 = (0, 0.3, 0.4, 0.8)$$

$$\tilde{A}_3 = (0.2, 0.7, 1.0, 0)$$

试问 U 上的模糊集 $\tilde{B} = (0.1, 0.5, 0.3, 0.7)$ 与哪个模糊集最接近?

解: 用择近原则, 选用格贴近度

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_1, \tilde{B}) &= (\tilde{A}_1 \odot \tilde{B}) \wedge (\tilde{A}_1 \otimes \tilde{B})^c \\
&= [\bigvee_{i=1}^4 (\tilde{A}_1(u_i) \wedge \tilde{B}(u_i))] \wedge [1 - \bigwedge_{i=1}^4 (\tilde{A}_1(u_i) \vee \tilde{B}(u_i))] \\
&= 0.3 \wedge 0.5 = 0.3
\end{aligned}$$

同样:

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_2, \tilde{B}) &= 0.7 \wedge 0.9 = 0.7 \\
(\tilde{A}_3, \tilde{B}) &= 0.5 \wedge 0.8 = 0.5
\end{aligned}$$

因此:

$$(\tilde{A}_2, \tilde{B}) = \max\{(\tilde{A}_i, \tilde{B}) | 1 \leq i \leq 3\}$$

那么 \tilde{B} 与 \tilde{A}_2 最接近。

若采用格贴近度 $(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2}[(\tilde{A} \odot \tilde{B}) + (\tilde{A} \otimes \tilde{B})^c]$ 则:

$$(\tilde{A}_1, \tilde{B}) = \frac{1}{2}[0.3 + 0.5] = 0.4$$

$$(\tilde{A}_2, \tilde{B}) = \frac{1}{2}[0.7 + 0.9] = 0.8$$

$$(\tilde{A}_3, \tilde{B}) = \frac{1}{2}[0.5 \wedge 0.8] = 0.65$$

结果也是 \tilde{B} 与 \tilde{A}_2 最接近。

若采用相对海明距离表示贴近度, 即 $N_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\tilde{A}(x_i) - \tilde{B}(x_i)|$ 则:

$$\begin{aligned}
N_H(\tilde{A}_1, \tilde{B}) &= 1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\tilde{A}_1(u_i) - \tilde{B}(u_i)| \\
&= 1 - \frac{1}{4}(0.8 + 0.4 + 0.3 + 0.4) = 0.525
\end{aligned}$$

同样: $N_H(\tilde{A}_2, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{4}(0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.1) = 0.875$

$$N_H(\tilde{A}_3, \tilde{B}) = 1 - \frac{1}{4}(0.1 + 0.2 + 0.7 + 0.7) = 0.575$$

按择近原则结论仍是 \tilde{B} 与 \tilde{A}_2 最贴近。

例 9.8 手写英文字母识别。将标准的英文大写字母写入正方形框内, 正方形框内有米字格, 然后从对角线方向及左、右、上、下等共八个方向, 测量该字母, 得到该字母的八个特征数值 d_1, d_2, \dots, d_8 。这样每一个英文字母就可以用一个八维向量 (d_1, d_2, \dots, d_8) 来描述。然后将描述字母的向量正规化, 使其成为一个模糊向量, 即令:

$$\alpha_i = \frac{d_i}{d_m}, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

其中 $d_m = \max\{d_1, d_2, \dots, d_8\}$, 因此 $0 \leq \alpha_i \leq 1$, 这样该英文字母就用模糊向量 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8)$ 来代表。于是 26 个英文字母就得到 26 个模糊向量:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_i &= (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_8^i) \\
i &= 1, 2, \dots, 26
\end{aligned}$$

$\{F_i\}$ 作为 26 个英文大写字母的标准类型。

现有一个英文手写大写字母, 记为“ β ”, 现要识别 β , 记 β 的模糊向量为 $F_\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8)$ 。选择用欧氏距离表示的贴进度, 那么 F_β 与 F_i 的贴进度为:

$$N(F_i, F_\beta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\sum_{j=1}^8 (\alpha_j - \beta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$i = 1, 2, \dots, 26$$

根据择近原则, 若:

$$N(F^*, F_\beta) = \max \{N(F_i, F_\beta) | 1 \leq i \leq 26\}$$

则手写字母 β 识别为标准类型为 F^* 的英文字母, $F^* \in \{F_i | i = 1, 2, \dots, 26\}$ 。

B. N. Chatterji 曾用这种方法在 TDC316 计算机上进行实验, 识别正确率可达 96% [14]。

例 9.9 本例介绍模糊模式识别在条码识别中的应用。

条码识别有着广泛的应用, 条码识别技术成本低, 识别率高, 因此常把数字或字母转换成条码进行识别。

现把 0~9 数字用条码表示, 每个数字用三个黑条二个白条共五个条组成的条码表示。若记黑条为 1 白条为 0, 则数字 0~9 对应的条码排列如表 9.1 所示。

表 9.1

数字 \ 码序	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
二	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
三	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
四	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
五	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

由表 9.1 可见, 每个数字 $k (k \in \{0, 1, \dots, 9\})$ 由一个向量 a_k 表示, 如数字 4 表示为:

$$a_4 = (1, 1, 0, 0, 1)$$

条码是有一定长度的, 因此在读取条码信息时一般每一条上读多个点, 比如读四个点, 这样就相当于从条码上读取了四个向量 a_k , 共 $4 \times 5 = 20$ 个特征信息, 增加了识别率。因此我们可为每个数字 k 建立一个标准模板矩阵:

$$M_k = [m_{ij}]_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} a_k \\ a_k \\ a_k \\ a_k \end{bmatrix}$$

例如数字 4 的标准模板矩阵为:

$$M_4 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_4 \\ a_4 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对一个实际的数字的条码的识别,就是把实际的条码对应的矩阵对 0~9 的标准模板矩阵进行识别,看与哪一个最接近。

实际条码由于印刷、运输、保存、使用过程中可能会产生污点、飞白点、颜色深度不够、背景灰度不一等干扰,因此待识别的条码对应的矩阵一般是 $[0,1]$ 上的模糊矩阵,设为:

$$\tilde{R} = [r_{ij}]_{4 \times 5}$$

其中 r_{ij} 表示 (i,j) 位置的灰度,特别地当 $r_{ij}=1$ 时表示黑色, $r_{ij}=0$ 时表示白色。当 $0 < r_{ij} < 1$ 则表示介于黑、白之间的灰色。这样一个条码的特征信息就包含于 \tilde{R} 中,它包含了 $4 \times 5 = 20$ 个特征。

定义标准模板矩阵 M_k 和待识别数字矩阵 \tilde{R} 之间的接近度为:

$$d(M_k, \tilde{R}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 \{ (m_{ij} \wedge r_{ij}) \vee [(1 - m_{ij}) \wedge (1 - r_{ij})] \}$$

取大运算之前部分识别黑条,之后部分则用来识别白条。然后按择近原则进行判别。

如待识别条码矩阵为:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.9 & 0.9 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

由各标准模板矩阵 M_k 和接近度的定义可计算得:

$$\begin{aligned} d(M_0, \tilde{R}) &= 13.3, & d(M_1, \tilde{R}) &= 9.5 \\ d(M_2, \tilde{R}) &= 10.3, & d(M_3, \tilde{R}) &= 11.7 \\ d(M_4, \tilde{R}) &= 9.7, & d(M_5, \tilde{R}) &= 10.5 \\ d(M_6, \tilde{R}) &= 11.9, & d(M_7, \tilde{R}) &= 6.7 \\ d(M_8, \tilde{R}) &= 8.1, & d(M_9, \tilde{R}) &= 8.9 \end{aligned}$$

可见 $d(M_0, \tilde{R}) = \max \{ d(M_k, \tilde{R}) \mid 0 \leq k \leq 9 \}$

故识别结果为该条码表示数字 0。

上述方法曾应用于上海煤气公司用户帐单的销帐处理以及复旦大学图书馆的检索工作中([14]邵寿贇等)。

这一方法中所定义的接近度实际上是用绝对海明距离表示的,因为 m_{ij} 只取 1 或 0, 因此有:

$$\begin{aligned} (m_{ij} \wedge r_{ij}) \vee [(1 - m_{ij}) \wedge (1 - r_{ij})] \\ = 1 - |m_{ij} - r_{ij}| \end{aligned}$$

那么 $d(M_k, R) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 |m_{ij} - r_{ij}|$

如果我们对上式进行归一化处理, 就可以变为等价的海明(Hamming)贴近度:

$$N_H(M_k, R) = 1 - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 |m_{ij} - r_{ij}|$$

参考文献

- [1] 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海科技出版社, 1983
- [2] 胡淑礼. 模糊数学及其应用. 四川大学出版社, 1994
- [3] [日]寺野寿郎, 浅居喜代治, 菅野道夫编, 刘维仲等译. 模糊系统理论及应用. 天津大学出版社, 1991
- [4] 李洪兴等. 工程模糊数学方法及应用. 天津科学技术出版社, 1993
- [5] 刘有才, 刘增良. 模糊专家系统原理与设计. 北京航空航天大学出版社, 1995
- [6] 郭桂蓉, 庄钊文. 信息处理中的模糊技术. 国防科技大学出版社, 1993
- [7] [日]水木雅晴. 模糊数学及其应用. 科学出版社, 1986
- [8] 何新贵. 模糊知识处理的理论与技术. 国防工业出版社, 1994
- [9] 肖位枢. 模糊数学基础及应用. 航空工业出版社, 1992
- [10] [日]浅居喜代治等著, 赵汝怀译. 模糊系统理论入门. 北京师范大学出版社, 1982
- [11] 汪培庄, 韩立岩. 应用模糊数学. 北京经济学院出版社, 1989
- [12] 吴秉坚. 模糊数学及其经济分析. 中国标准出版社, 1994
- [13] 黄崇福, 王家鼎. 模糊信息分析与应用. 北京师范大学出版社, 1992
- [14] 杨和雄, 李崇文. 模糊数学和它的应用. 天津科学技术出版社, 1993
- [15] Chuen Chien Lee. Fuzzy Logic in Control System; Fuzzy Logic Controller—Part I and Part II. IEEE Transaction on System. Man and Cybernetics, Vol. 20, No. 2, 1990
- [16] Witold Pedrycz. Fuzzy Control and Fuzzy Systems. Research Studies Press LTD., 1989
- [17] H J Zimmermann. Fuzzy Set Theory and Its Applications kluwer-Nijhoff Publishing, 1985
- [18] Ronald R. Yager Lotfi A Zadeh. An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems, Kluwer Academic Publishers, 1992
- [19] 李士勇等. 模糊控制和智能控制理论与应用. 哈尔滨工业大学出版社, 1990
- [20] 窦振中. 模糊逻辑控制技术及其应用. 北京航空航天大学出版社, 1995
- [21] 戎月莉. 计算机模糊控制原理及应用. 北京航空航天大学出版社, 1995
- [22] 张晋格. 计算机控制原理与应用. 电子工业出版社, 1995
- [23] 张化光. 复杂系统的模糊辨识与模糊自适应控制. 东北大学出版社, 1993
- [24] 黄苏南, 邵惠鹤, 张钟俊. 智能控制的理论和方法. 控制理论与应用, 1994, Vol. 11, No. 4
- [25] 贺剑锋等. 模糊控制的新近发展. 控制理论与应用, 1994, 11(2)
- [26] 张良杰, 李衍达. 模糊神经网络技术的新近发展. 信息与控制, 1995, 24(1)
- [27] 应行仁, 曾南. 采用 BP 神经网络记忆模糊规则的控制. 自动化学报, 1991, 17(1)
- [28] 王隆杰, 毛宗源. 利用神经网络进行推理的模糊控制器. 控制理论与应用, 1994, 11(4)
- [29] 鲍新福等. 自调整比例因子的模糊控制器. 自动化学报, 1987, 13(2)
- [30] 王全章等. 模糊调节器参数的在线自整定. 控制与决策, 1989, 第 4 期
- [31] 徐萼耀, 张嗣良. 青霉素发酵过程 EFC 系统. 信息与控制, 1989, 第 4 期
- [32] 淳于怀太. 模糊控制器与积分控制器混合应用的研究. 化工自动化及仪表, 1986, 第 5 期
- [33] 机械部机电产品设计信息中心. 模糊技术的发展及我国的对策. 微计算机信息, 1994, 2
- [34] Frank J Bartos. Fuzzy Logic Widens Its Appeal to Industrial Controls. Control Engineering, 1993, 6
- [35] Nick Infelise. A Clear Vision of Fuzzy Logic. Control Engineering, 1991, 7
- [36] Payman Arabshahi. Fuzzy Control of Back-Propagation. IEEE'92

- [37] T J Procyk, E H Mamdani. A Linguistic Self-Organizing Process Controller. *Automatica*. 1979, 15—30
- [38] R M Tong. A Retrospective View of Fuzzy Control System. *Fuzzy Sets and System*. 1984, 14(3)
- [39] Austrom. Directions in Intelligent Control. IFAC International Symposium. ITAC91
- [40] Michio Sugeno. An Introductory Survey of Fuzzy Control. *Information Sciences*. 1985, (36)
- [41] Kicker W J M, Van Nauta Lemke H R. Application of a Fuzzy Controller in a Warm Plant. *Automation*. 1976, (12)
- [42] King P J, Mamdani E H. The Application of Fuzzy Control Systems to Industrial Process. 6th IFAC World Congr. Boston, 1975
- [43] E M Scharf, N J Mandic. The application of a fuzzy controller to the control of a multi-degree-freedom robot arm. In *Industrial Applications of Fuzzy Control*, M. Sugeno, Ed. Amsterdam: North-Holland, 1985. 41—62.
- [44] M Sugeno, K Murakami. Fuzzy parking control of model car. In 23 rd IEEE Conf. on Decision and Control. Las Vegas, 1984
- [45] M Sugeno, K Murakami, An experimental study on fuzzy parking control using a model car. In *Industrial Applications of Fuzzy Control*. M Sugeno, Ed Amsterdam: North-Holland, 1985
- [46] L I Larkin. A fuzzy logic controller for aircraft flight control. In *Industrial Applications of Fuzzy Control*. M Sugeno, Ed Amsterdam: North-Holland, 1985
- [47] [日]水本雅晴. 模糊工学的现状与展望. *模糊系统与数学*. 1993, 7(1)
- [48] Chin-Teng Lee, C S George Lee. Neural-Network-Based Fuzzy Logic Control and Decision System. *IEEE Transactions on Computers*. 1991, 40(12)
- [49] Akira Kawanura, Nobuo watanabe. A Prototype of Neuro-Fuzzy Cooperation System. *IEEE Fuzzy'92*. 1275-1282
- [50] Jyh-Shing R Jang. Self-Learning Fuzzy Controllers Based on Temporal Back Propagation. *IEEE Transaction on Neural Networks*. 1992, 3(5):714—723
- [51] Hamid R Berenji, Pratap Khedkar. Learning and Tuning Fuzzy Logic Controllers Through Reinforcements. *IEEE Transaction on Neural Networks* 1992, 3(5): 724—740
- [52] Wang Yaonan. An Adaptive Control Using Fuzzy Logic Neural Network and Its Application. *控制理论与应用*. 1995, 12(4):437—444
- [53] 廖俊, 林建亚. 基于神经网络的自适应模糊控制器. *信息与控制*. 1995, 24(5):312-315
- [54] 杨煜普, 许晓鸣, 张仲俊. 基于人工神经网络的连续模糊控制. 第一层全球华人智能控制学术会议论文集. 901—906, 1994
- [55] 诸静等. 模糊控制原理与应用. 机械工业出版社, 1995
- [56] 张化光, 杨英旭, 柴天佑. 多变量模糊控制的现状与发展(1)——关于分层、自学习、自适应等问题. *控制与决策*. 1995, 10(3)
- [57] 闫世杰. 多变量模糊控制器的研究. *应用数学*. 1991, 4(3)
- [58] Madan M Gupta, Jerzy B Kiszka, G M Trojan. Multivariable Structure of Fuzzy Control System. *IEEE Transactions on System. Man and Cybernetics*. 1986, SMC-16(5)
- [59] G V S Raju, Jan Zhou. Adaptive Hierarchical Fuzzy Controller. *IEEE Transactions on System. Man and Cybernetics*. 1993, 23(4)
- [60] 戴忠达, 张曾科, 汤俭. 一种改进的模糊控制器及其应用. *自动化学报* 1990, 16(3)
- [61] 张曾科等. 自动控制专题. 清华大学自动化系讲义. 1991

- [62] 戴忠达, 张曾科. 多输入模糊控制器的设计及应用. 中国自动化学会 1988 年会论文集.
- [63] 刘立志, 蒋玉珍. 一种新的智能模糊控制算法及其应用. 控制与决策. 1995, 10(1)
- [64] 吴学礼等. 具有光纤红外比色智能测温功能的多输入模糊温度控制器及其应用. 第一全球华人智能控制大会论文集. 北京. 987—990. 1994
- [65] 杨自厚, 杨越. 模糊控制应用的发展动向
- [66] 涂时亮. Motorola 的模糊控制软件. 计算机世界. 1994, 5(4)
- [67] 王松年. 设计模糊逻辑基系统的软件工具 Fuzzy TECH. 计算机世界. 1994, 5(4)
- [68] 洗晓德. 神经网络模糊逻辑控制 NeuFuz. 计算机世界. 1994, 5(4)
- [69] M S Stachowicz, M E Kochanska. Fuzzy Modelling of the Process. 2nd IFSA Congress. Tokyo, Japan, July 1987
- [70] M. Mizumoto. Fuzzy controls under various approximate reasoning methods. In Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, July, 1987. 143—146
- [71] J B Kiszka, M E Kochanska, D S Sliwinska. The influence of some fuzzy implication operators on the accuracy of a fuzzy model-Part I. Fuzzy Sets Syst. 1985, 15:111—128
The influence of some fuzzy implication operators on the accuracy of a fuzzy model-Part II. Fuzzy Sets Syst. 1985, 15:223—240
- [72] Negoita C V, Sularia M. On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning. 1976, ECECSR Journal, 1
- [73] 王琦. 实用模糊数学. 科学技术文献出版社, 1992